

Engenharias CTG UFPE

Vestibular 2011-2

Física e Matemática

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. Este caderno contém as provas de FÍSICA e MATEMÁTICA, cada uma com 16 (dezesesseis) questões, numeradas de 01 a 16, que podem ser de proposições múltiplas e/ou de respostas numéricas. Se não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
04. As questões de proposições múltiplas apresentam 5(cinco) alternativas numeradas de duplo zero (0-0) a duplo quatro (4-4), podendo ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna **V**, as falsas, na coluna **F**. Caso não desejar responder algum item marque a coluna **NR**.
05. As questões numéricas apresentam respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (COLUNA D para as dezenas e COLUNA U para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na COLUNA D).
06. Ao receber a folha de respostas, confira o nome da prova, o seu nome e número de inscrição. Qualquer irregularidade observada comunique imediatamente ao fiscal.
07. Assinale a resposta de cada questão no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.
08. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta e faça as marcas de acordo com o modelo (■). **A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.**
09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isto poderá prejudicá-lo.
10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao candidato interpretar e decidir.
11. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

Nome:

Inscrição:

Identidade:

Órgão Expedidor:

Assinatura:

COMISSÃO DE PROCESSOS
SELETIVOS E TREINAMENTOS
(0xx81) 3412 0800
(0xx81)3412 0805



FÍSICA

Dados:

Aceleração da gravidade: 10 m/s^2

Densidade da água: 10^3 kg/m^3

Velocidade da luz no vácuo: $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

	30°	37°	45°
sen	0,50	0,60	0,71
cos	0,86	0,80	0,71

01. Uma estrela de nêutrons tem massa igual a quatro vezes a massa do Sol e volume esférico de raio 20 km . Considere a massa do Sol igual a $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ e as densidades da estrela de nêutrons e da água denotadas, respectivamente, por ρ_{est} e $\rho_{\text{água}}$. Se a ordem de grandeza da razão $\rho_{\text{est}}/\rho_{\text{água}}$ é 10^N , qual o valor de N ?

Resposta: 14

Justificativa: A densidade da estrela de nêutrons é dada por $\rho_{\text{est}} = M/V = 4(2 \times 10^{30} \text{ kg})/[4\pi(2 \times 10^4 \text{ m})^3/3] \cong 2,4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Assim, a ordem de grandeza da razão $\rho_{\text{est}}/\rho_{\text{água}}$ é 10^{14} .

02. Uma partícula é liberada em queda livre a partir do repouso. Calcule o módulo da velocidade média da partícula, em m/s , após ela ter caído por 320 m .

Resposta: 40

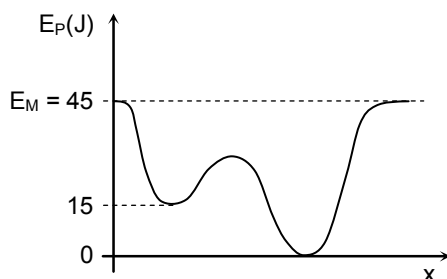
Justificativa: No MUV a velocidade média é a média aritmética das velocidades inicial e final. A velocidade final é $v^2 = 2g(\Delta h) = 2 \times 10 \times 320 = 6400 \rightarrow v = 80 \text{ m/s}$. Assim, $v_m = (80+0)/2 = 40 \text{ m/s}$.

03. Para medir o coeficiente de atrito cinético, μ_c , entre um bloco e uma superfície plana, um impulso inicial é dado ao bloco, que se desloca em linha reta sobre a superfície até parar. O bloco percorre 80 cm desde o instante em que a sua velocidade tem módulo igual a 2 m/s até o instante em que para. Expressando o coeficiente de atrito cinético na forma $\mu_c = A \times 10^{-2}$, qual o valor de A ?

Resposta: 25

Justificativa: Pela 2ª lei de Newton, $-F_{\text{at}} = Ma$, onde $F_{\text{at}} = \mu N = \mu Mg$. Assim, $a = -\mu g$. Pela equação de Torricelli, $v^2 = v_0^2 + 2aL$. Substituindo $v = 0$, obtemos $\mu = v_0^2/(2gL) = 0,25 = 25 \times 10^{-2}$.

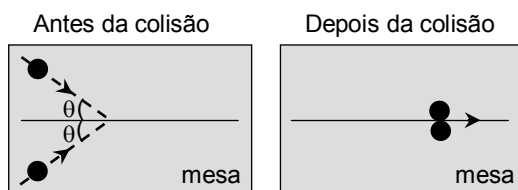
04. O gráfico seguinte mostra como a energia potencial de uma partícula varia com a sua posição. O valor da energia mecânica da partícula, E_M , também aparece no gráfico. A partícula de massa $0,1 \text{ kg}$ se move em linha reta. Todas as forças que atuam na partícula são conservativas. Obtenha a velocidade máxima da partícula, em m/s .



Resposta: 30

Justificativa: A energia mecânica é a soma da energia cinética com a energia potencial, $E_m = E_c + E_p$. Logo, a energia cinética máxima ocorre na posição onde a energia potencial é mínima, $(E_c)_{\max} = E_m - E_p = 45 \text{ J} = mv^2/2$. Assim, $v = 30 \text{ m/s}$.

- 05.** Duas partículas idênticas, que se movem sobre a superfície **horizontal** de uma mesa sem atrito, realizam uma colisão perfeitamente inelástica, como mostra a figura. Antes da colisão, cada partícula tinha velocidade de módulo **5 m/s** e direção $\theta = 37^\circ$ em relação à linha contínua da figura. Qual a velocidade das partículas após a colisão, em **m/s**?



Resposta: 04

Justificativa: Há a conservação da quantidade de movimento (momento linear) total das partículas. No caso de colisão perfeitamente inelástica, ao longo da direção da linha contínua da figura, escrevemos: $2Mv_f = Mv\cos\theta + Mv\cos\theta$, ou seja, $v_f = v\cos\theta = 5 \times 0,8 = 4 \text{ m/s}$.

- 06.** Um barco de passageiros afundou em um lago. É preciso içá-lo utilizando boias especiais. A massa do barco é **8000 kg** e o volume ocupado por ele é **3 m³**. Despreze o peso das boias. Determine o volume mínimo, em **m³**, que devem ter as boias para que o barco fique na iminência de ser elevado do fundo do lago.

Resposta: 05

Justificativa: O barco e as boias estão sujeitos às forças peso e empuxo. Aplicando a 2ª lei de Newton na iminência de movimento tem-se, $E_{\text{boia}} + E_{\text{barco}} - P_{\text{barco}} = 0$. Logo, $\rho_{\text{água}}V_{\text{boia}}g + \rho_{\text{água}}V_{\text{barco}}g - M_{\text{barco}}g = 0 \rightarrow V_{\text{boia}} = 5 \text{ m}^3$.

- 07.** Descobre-se que uma estrela de massa igual a quatro vezes a massa do Sol, localizada na Via Láctea, possui um planeta orbitando ao seu redor, em movimento circular uniforme (MCU) de raio R . O tempo necessário para que esse exoplaneta percorra uma circunferência completa ao redor da estrela é a metade de um ano terrestre. Considere que a Terra realiza um MCU ao redor do Sol de raio R_{TS} e despreze a influência gravitacional de outros corpos do sistema solar. Quanto vale a razão R/R_{TS} ?

Resposta: 01

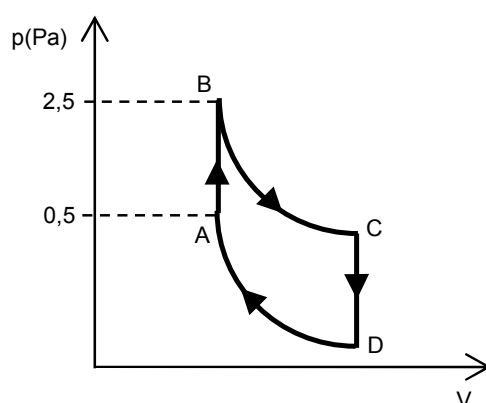
Justificativa: A 2ª lei de Newton para o exoplaneta sob a ação da força gravitacional da estrela é dada por $GM_E M_P / R^2 = M_P v^2 / R$. Escrevendo $v = 2\pi R / T_P$, obtemos $R^3 = GM_E T_P^2 / (4\pi^2)$. O mesmo cálculo realizado para o sistema Terra – Sol leva a $R_{TS}^3 = GM_S T^2 / (4\pi^2)$. Dividindo uma equação pela outra, obtemos $(R/R_{TS})^3 = (M_E/M_S)(T_P/T)^2$. Substituindo $M_E = 4M_S$ e $T_P = T/2$, encontramos $R/R_{TS} = 1$.

- 08.** Um estudante precisa de três litros de água à temperatura de 37°C . Ele já dispõe de dois litros de água a 17°C . A que temperatura, em $^\circ\text{C}$, ele deve aquecer o litro de água a ser misturado com o volume já disponível? Considere a existência de trocas térmicas apenas entre os volumes de água na mistura.

Resposta: 77

Justificativa: Considerando que haja trocas térmicas apenas entre os volumes de água misturados, as trocas de calor são descritas pela equação $M_1 c (T_f - T_1) + M_2 c (T_f - T_2) = 0$. Como a densidade da água é $\rho = M/V$, então, $T_2 = V_1(T_f - T_1)/V_2 + T_f$. Substituindo os valores, obtemos $T_2 = 77^\circ\text{C}$.

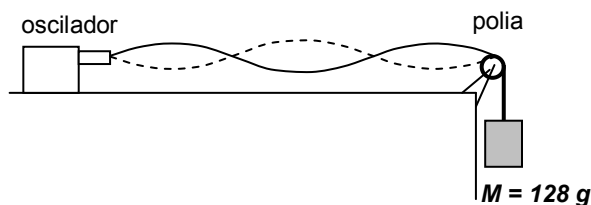
- 09.** Um gás ideal se transforma de acordo com o ciclo termodinâmico mostrado abaixo no diagrama pressão versus volume. Os processos AB e CD são isovolumétricos, e os processos BC e DA são isotérmicos. Qual a razão T_C/T_D entre as respectivas temperaturas absolutas do gás nos pontos C e D ?



Resposta: 05

Justificativa: Segundo a lei dos gases ideais, ao longo da isovolumétrica AB, temos que $p_A/T_A = p_B/T_B$. Se os processos BC e CD são isotérmicos, então, $T_C = T_B$ e $T_D = T_A$, de modo que $T_C/T_D = p_B/p_A = 5$.

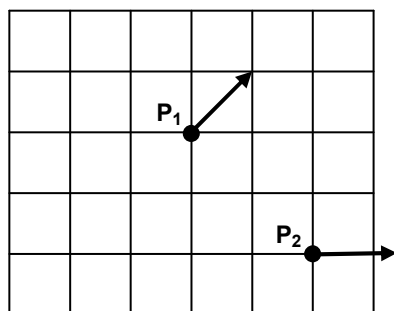
10. A figura mostra uma montagem onde um oscilador gera uma onda estacionária que se forma em um fio. A massa de um pedaço de **100 m** deste fio é **20 g**. Qual a velocidade de propagação das ondas que formam a onda estacionária, em **m/s**?



Resposta: 80

Justificativa: A velocidade de uma onda mecânica se propagando em um fio é dada por $v = (T/\mu)^{1/2}$, onde T é a tração sobre o fio e μ é a densidade linear do fio. Assim, $T = 0,128 \times 10 = 1,28 \text{ N}$ e $\mu = 0,02/100 = 2 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$, de modo que $v = 80 \text{ m/s}$.

11. Uma carga elétrica **puntiforme** gera campo elétrico nos pontos **P₁** e **P₂**. A figura a seguir mostra setas que indicam a direção e o sentido do vetor campo elétrico, nestes pontos. Contudo, os comprimentos das setas não indicam os módulos destes vetores. O módulo do campo elétrico no ponto **P₁** é **32 V/m**. Calcule o módulo do campo elétrico no ponto **P₂**, em **V/m**.



Resposta: 16

Justificativa: Visto que a carga é puntiforme, a posição da carga é determinada pelo cruzamento das direções das setas. A carga se encontra no vértice superior direito do quadrado (de lado L) no canto inferior esquerdo da figura. O módulo campo gerado no ponto P_1 é

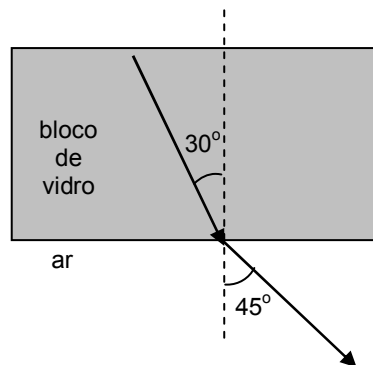
$$E_1 = kQ/(2\sqrt{2}L)^2 = 32 \rightarrow kQ/L^2 = 256. \text{ O campo elétrico } E_2 = kQ/(4L)^2 = 256/16 = 16.$$

12. Uma pequena lanterna utiliza uma pilha do tipo AA. A pilha tem resistência interna $r = 0,25 \Omega$ e fornece uma força eletromotriz de $\mathcal{E} = 1,5 \text{ V}$. Calcule a energia dissipada pela lâmpada, de resistência elétrica $R = 0,5 \Omega$, quando esta é ligada durante $\Delta t = 30 \text{ s}$. Obtenha o resultado em **J**.

Resposta: 60

Justificativa: A corrente da lâmpada é dada pela lei de Ohm, tem-se que $\varepsilon = (r + R)I \rightarrow I = 1,5/(0,25+0,5) = 2 \text{ A}$. A potência da lâmpada é $P = RI^2 = 0,5 \times 2^2 = 2 \text{ W}$. A energia química da pilha transformada em luz e calor é $E = P(\Delta t) = 60 \text{ J}$.

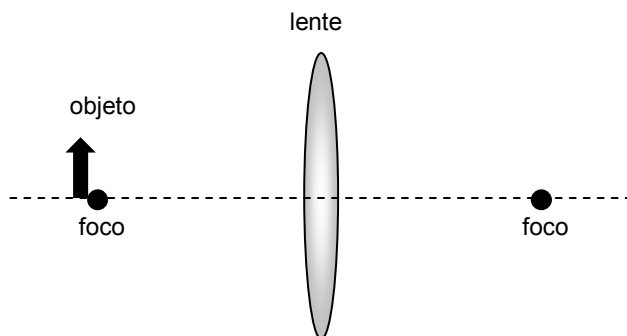
- 13.** A figura apresenta um experimento com um raio de luz que passa de um bloco de vidro para o ar. Considere a velocidade da luz no ar como sendo igual à velocidade da luz no vácuo. Qual é a velocidade da luz dentro do bloco de vidro, em unidades de 10^8 m/s ?



Resposta: 02

Justificativa: Usando a lei de Snell, $n_1 \sin(30^\circ) = n_2 \sin(45^\circ) \rightarrow 0,5 = (v/c)0,71 \rightarrow v = 0,5c/0,71 = 2,11 \times 10^8 \text{ m/s}$.

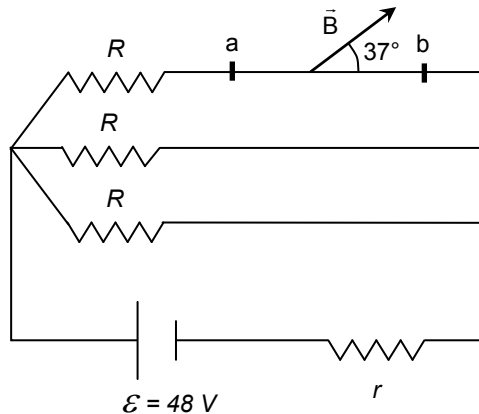
- 14.** A figura mostra uma montagem onde um objeto foi colocado sobre o eixo ótico distando **4,2 cm** de uma lente convergente de distância focal **$f = 4 \text{ cm}$** . Calcule o fator de ampliação, em módulo, para a montagem descrita.



Resposta: 20

Justificativa: Usando a expressão que relaciona a distância focal com a distância do objeto e a da imagem tem-se, $1/f = 1/o + 1/i \rightarrow i = 84 \text{ cm}$. O módulo da ampliação é $A = i/o = 20$.

15. O circuito elétrico plano, mostrado a seguir, possui uma bateria de força eletromotriz $\mathcal{E} = 48 \text{ V}$ e resistência interna $r = 1 \, \Omega$ ligada a resistores de resistências $R = 9 \, \Omega$ e $r = 1 \, \Omega$. O trecho retilíneo ab do circuito possui comprimento de 50 cm . No plano do circuito, existe um campo magnético uniforme, de módulo $B = 2,5 \text{ T}$ e direção fazendo um ângulo de 37° com a direção do trecho ab . Qual o módulo da força magnética que age no trecho ab , em N ?



Resposta: 03

Justificativa: A corrente elétrica constante no circuito é dada por $i = \mathcal{E}/R_{\text{eq}}$, onde a resistência equivalente é $R_{\text{eq}} = R/3 + r = 4 \, \Omega$. Assim, $i = 12 \text{ A}$. A corrente que percorre o trecho ab é, portanto, 4 A . A força devido a um campo magnético de módulo B em um trecho retilíneo de comprimento L de um fio atravessado por uma corrente elétrica i constante possui módulo $F = iLB\sin\theta$, onde θ é o ângulo entre o trecho do fio e o vetor campo magnético. Nesse caso, substituindo os dados fornecidos na expressão da força, obtemos $F = (4 \text{ A})(0,5 \text{ m})(2,5 \text{ T})\sin(37^\circ) = 3 \text{ N}$.

16. Sobre os modelos atômicos de Thomson, Rutherford e Bohr, podemos fazer as seguintes afirmações.
- 0-0) A partir do resultado do espalhamento de partículas α por folhas metálicas finas, Rutherford concluiu que a densidade de carga positiva do modelo atômico de Thomson era muito maior que a real.
 - 1-1) A estabilidade do átomo de Bohr era garantida por um postulado, pois, de acordo com a física clássica, um elétron em movimento circular teria perdas de energia por irradiação devido à sua aceleração centrípeta.
 - 2-2) De acordo com o modelo de Rutherford, os elétrons se distribuem em órbitas quantizadas na região ao redor do núcleo denominada eletrosfera.
 - 3-3) A razão entre as energias quantizadas de duas órbitas no modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio é igual à razão entre os números quânticos associados a estas órbitas.
 - 4-4) No modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio, o produto da velocidade do elétron pelo raio da órbita é quantizado.

Resposta: FVFFV

Justificativa:

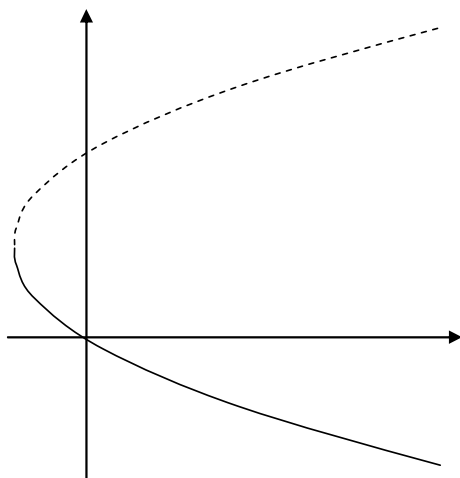
- 0-0) FALSA, pois, a partir do resultado do espalhamento de partículas α por finas folhas metálicas, Rutherford concluiu que a densidade de carga positiva do modelo atômico de Thomson era muito menor que a real, criando, assim, o conceito de núcleo atômico.
- 1-1) VERDADEIRA, pois, de fato, elétrons acelerados irradiam energia, de acordo com a física clássica, devendo espiralar até o núcleo. Bohr “resolveu” a questão da estabilidade atômica por meio de um postulado.
- 2-2) FALSA, pois Rutherford não considerou a quantização das órbitas eletrônicas em seu modelo.
- 3-3) FALSA, pois a razão entre as energias quantizadas de duas órbitas no modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio é igual ao inverso do quadrado da razão entre os números quânticos associados a estas órbitas.
- 4-4) VERDADEIRA, pois Bohr considerou, em seu modelo, que o momento angular do elétron em uma órbita circular é quantizado, sendo este proporcional ao produto da velocidade do elétron pelo raio da sua órbita.

MATEMÁTICA

01. A curva da figura abaixo representa parte do conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem a equação

$$y^2 - 4y - 4x = 0.$$

Com base nesses dados, analise as afirmações seguintes.



- 0-0) Para cada y real, existe um real x tal que (x, y) está na curva.
- 1-1) A curva é o gráfico da função $y = 2 \pm 2\sqrt{x+1}$, com domínio os reais ≥ -1 .
- 2-2) A parte da curva em traço pontilhado ilustra o gráfico da função $y = 2 + 2\sqrt{x+1}$, com domínio os reais ≥ -1 .
- 3-3) A parte da curva em traço contínuo ilustra o gráfico da função $y = 2 - 2\sqrt{x+1}$, com domínio os reais ≥ -1 .
- 4-4) Não é possível expressar x como função de y .

Resposta: VFVVF

Justificativa:

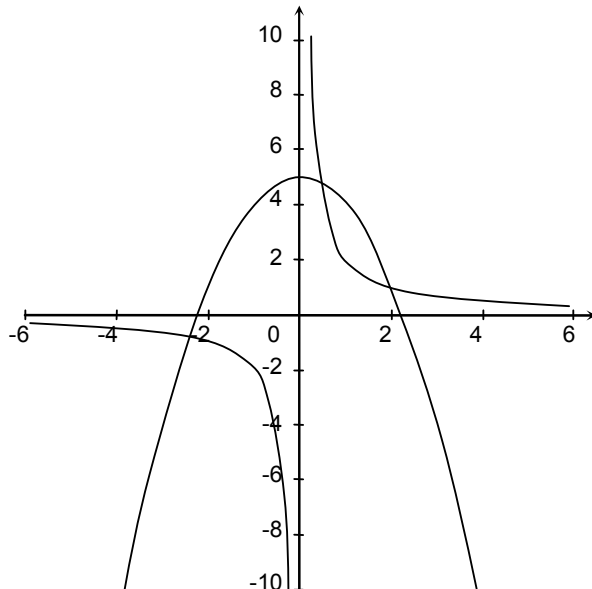
Completando quadrados, obtemos

$$y^2 - 4y + 4 = 4x + 4 \text{ ou } (y - 2)^2 = 4(x + 1).$$

Portanto $y = 2 \pm 2\sqrt{x+1}$, que são duas funções de x .

02. Na ilustração a seguir, temos parte dos gráficos das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5 - x^2$ e $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2/x$.

Analise as afirmações a seguir referentes às duas funções.



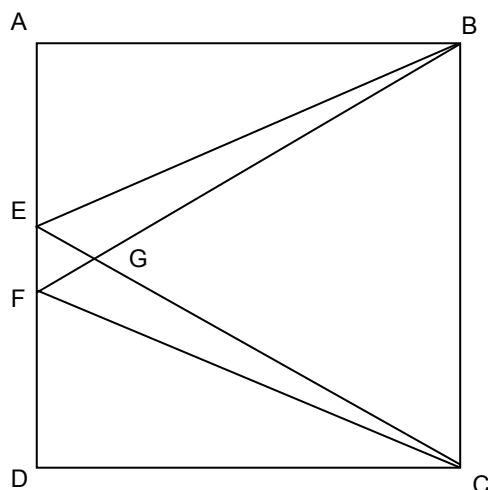
- 0-0) Um dos pontos de interseção dos gráficos de f e g é $(2, 1)$.
1-1) As abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g são as raízes reais da equação $x^3 - 5x + 2 = 0$.
2-2) $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)/x$, para todo x real e diferente de zero.
3-3) O ponto de interseção dos gráficos de f e g situado no terceiro quadrante tem ordenada $2(1 - \sqrt{2})$.
4-4) Os gráficos de f e g se interceptam em quatro pontos.

Resposta: VVFVF

Justificativa:

Substituindo $x = 2$ nas duas funções obtemos $f(2) = 1$ e $g(2) = 1$; logo, o ponto $(2, 1)$ está no gráfico das duas funções. Temos $f(x) = g(x)$ se e somente se $5 - x^2 = 2/x$ que é equivalente a $x^3 - 5x + 2 = 0$. Do cálculo anterior, temos que $f(x) - g(x) = (-x^3 + 5x - 2)/x = -(x - 2)(x^2 + 2x - 1)/2$, dividindo $x^3 - 5x + 2$ por $(x - 2)$. As abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g são as raízes de $(x - 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$ que são $x = 2$ e $x = (-2 \pm 2\sqrt{2})/2 = -1 \pm \sqrt{2}$ e $g(-1 - \sqrt{2}) = 2/(-1 - \sqrt{2}) = -2(-1 + \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2})$.

03. Na figura abaixo ABCD é um quadrado de lado 1, e BCG é um triângulo equilátero.



0-0) O ângulo DEC mede 45°

1-1) O segmento ED mede $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-2) A tangente do ângulo AEB é $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

3-3) O triângulo EBC é isósceles

4-4) O segmento EB mede $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$

Resposta: FVVFF

Justificativa:

$ECB = CED = 60^\circ$, $ECD = 30^\circ$ e $\operatorname{tg} 30^\circ = ED/DC = 1/\sqrt{3}$

Então $ED = 1/\sqrt{3}$ e $AE = 1 - 1/\sqrt{3}$. Portanto, a tangente do ângulo AEB é $(3 + \sqrt{3})/2$. O ângulo EBC é maior que 60° e o ângulo BEC é menor que 60° .

Temos: $EB^2 = 1^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{7 - 2\sqrt{3}}{3}$ e $EB = \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{3}}{3}}$.

04. Se o número complexo $3 + 2i$ é raiz da equação $x^3 - 23x + c$, com c sendo uma constante real, qual o valor de c ?

Resposta: 78

Justificativa:

$3 + 2i$ é raiz da equação $x^2 - 6x + 13$ e, dividindo $x^3 - 23x + c$ por este polinômio obtemos quociente $x + 6$ e resto $c - 78$. Para o resto ser zero devemos tomar $c = 78$.

05. Diferentes quantidades de fertilizantes são aplicadas em plantações de cereais com o mesmo número de plantas, e é medido o peso do cereal colhido em cada plantação. Se x kg de fertilizantes são aplicados em uma plantação onde foram colhidas y toneladas (denotadas por t) de cereais, então, admita que estes valores estejam relacionados por $y = k \cdot x^r$, com k e r constantes. Se, para $x = 1$ kg, temos $y = 0,2$ t e, para $x = 32$ kg, temos $y = 0,8$ t, encontre o valor de x , em kg, quando $y = 1,8$ t e assinale a soma dos seus dígitos.

Resposta: 09

Justificativa:

Substituindo $x = 1$ e $y = 0,2$ em $y = kx^r$, obtemos $0,2 = k \cdot 1$ e $k = 0,2$. Substituindo $x = 32$ e $y = 0,8$ obtemos $0,8 = 0,2 \cdot 32^r$ que é equivalente a $2^2 =$

2^{5r} e segue que $r = 2/5=0,4$. Portanto, $y = 0,2 \cdot x^{0,4}$. Substituindo $y = 1,8$ obtemos $1,8 = 0,2 \cdot x^{0,4}$ e $x = 9^{1/0,4} = 3^5 = 243$ kg.

06. A população de peixes de um lago é atacada por uma doença e deixa de se reproduzir. A cada semana, 20% da população morre. Se inicialmente havia 400.000 peixes no lago e, ao final da décima semana, restavam x peixes, assinale $10 \log x$. Dado: use a aproximação $\log 2 \approx 0,3$.

Resposta: 46

Justificativa:

A população de peixes no lago após n semanas é $P(n) = 400000(0,8)^n$. $x = P(10) = 4 \cdot 10^5 \cdot (0,8)^{10} = 4 \cdot 10^5 \cdot 8^{10}/10^{10} = 4 \cdot 8^{10} \cdot 10^{-5}$ logo $\log x = \log 4 + 10 \log 8 - 5 \log 10 \approx 2,0,3 + 30 \cdot 0,3 - 5 = 32 \cdot 0,3 - 5 = 9,6 - 5 = 4,6$.

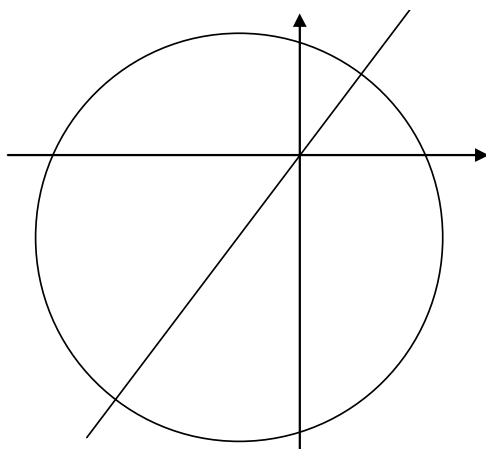
07. Em um grupo de cinco torcedores, três torcem pelo time A, e dois torcem pelo time B. Escolhendo aleatoriamente três torcedores do grupo, qual a probabilidade percentual de serem selecionados os dois torcedores do time B?

Resposta: 30

Justificativa:

O número de maneiras de escolher três dentre os cinco torcedores é $C_5^3 = 5 \cdot 4/2 = 10$. O número de maneiras de escolher três torcedores dos quais dois são os que torcem pelo time B é três. A probabilidade procurada é $3/10 = 30\%$.

08. Na ilustração a seguir, temos a circunferência com equação $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 75$ e a reta passando pela origem e pelo centro da circunferência. Determine o ponto da circunferência mais distante da origem e indique esta distância.



Resposta: 15

Justificativa:

A equação da circunferência também pode se escrever na forma $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

$+ 4)^2 = 10^2$, e a circunferência tem centro no ponto $(-3, -4)$ e raio 10. A reta passando pela origem e pelo centro da circunferência tem equação $y = -4x/(-3) = 4x/3$. Os pontos da circunferência mais próximo e mais distante da origem são as interseções da circunferência com a reta passando pela origem e pelo centro da circunferência. Substituindo $y = 4x/3$ na equação da circunferência, obtemos $(x + 3)^2 + (4x/3 + 4)^2 = 100$ que se simplifica como $(x + 3)^2 + 16(x + 3)^2/9 = 100$ e também como $(x + 3)^2 = 36$ e $x = \pm 6 - 3 = 3, -9$. Os pontos de interseção são $(3, 4)$ e $(-9, -12)$. O ponto mais distante da origem é $(-9, -12)$, e a distância é $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

- 09.** Nos anos de 2008, 2009 e 2010, um trabalhador recebeu um total de rendimentos de R\$ 66.200,00. Se a renda do trabalhador, em 2010, foi 10% superior à renda de 2009, e a renda em 2009 foi 10% superior à renda de 2008, calcule o total de rendimentos do trabalhador em 2010 e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: 08

Justificativa:

Se x é a renda do trabalhador em 2010, então, a sua renda, em 2009, foi de $x/1,1$ e, em 2008, foi de $x/1,1^2$. Segue que $x + x/1,1 + x/1,21 = 66200$ e $x \cdot 3,31 = 1,21 \cdot 66200$ e $x = 1,21 \cdot 20000 = 24200$ reais.

- 10.** Sabendo que $\frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1}$, assinale $A + B + 2C$.

Resposta: 02

Justificativa:

Temos

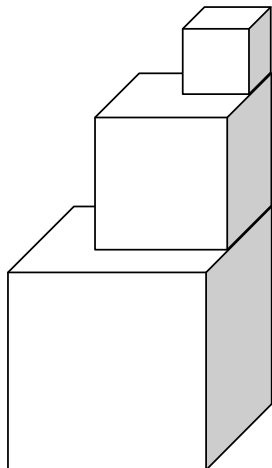
$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 2x)}{x(x^2 + x - 2)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Igualando os numeradores, temos $A + B + C = 1$, $A - B + 2C = -2$ e $-2A = 4$. Portanto, $A = -2$, $2A + 3C = -1$, $C = 1$ e $B = 2$. Logo, $A + B + 2C = -2 + 2 + 2 = 2$.

- 11.** Considere três cubos, com arestas medindo 1 cm, 2 cm e 3 cm. Os cubos serão colados ao longo de suas faces de modo a se obter um sólido. Pretende-se saber quais os sólidos com menor área total da superfície.

Por exemplo, se a colagem é feita como na ilustração a seguir temos um sólido com área da superfície $6(1 + 4 + 9) - (8 + 2) = 74 \text{ cm}^2$.

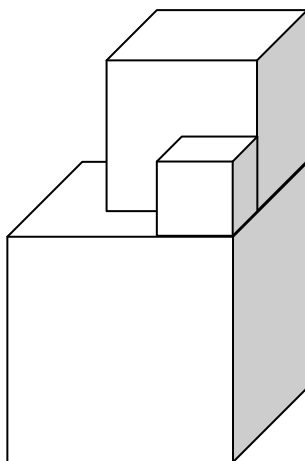


Dentre os sólidos obtidos, colando os três cubos ao longo de suas faces, existem alguns com menor área total da superfície. Indique o valor desta área em cm^2 .

Resposta: 72

Justificativa:

As somas das áreas das superfícies dos três cubos é $6(1 + 4 + 9) = 84 \text{ cm}^2$. A maior área de contato dos dois cubos maiores é 4 cm^2 , o que diminui a área do sólido em $2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$. A maior área de contato do cubo menor com o sólido já construído é obtida quando o menor tem uma face de contato com cada um dos dois cubos maiores, o que diminui a área do sólido agora construído em $2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$. A menor área de superfície possível é $84 - 8 - 4 = 72 \text{ cm}^2$ e um dos sólidos possíveis está ilustrado a seguir.



12. Uma locadora de vídeos tem três estilos de filmes: de ficção científica, dramáticos e comédias. Sabendo que:

- o total de filmes de ficção científica e dramáticos, adicionado de um quarto dos filmes de comédia, corresponde à metade do total de filmes da locadora;
- o número de filmes de comédia excede em 800 o total de filmes de ficção científica e dramáticos;
- o número de filmes dramáticos é 50% superior ao número de filmes de ficção científica.

Encontre o número de filmes dramáticos da locadora e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: 12

Justificativa:

Sejam x , y e z os números respectivos de filmes de ficção, dramáticos e de comédias. Da primeira condição, temos $x + y + z/4 = (x + y + z)/2$ que se simplifica como $x + y - z/2 = 0$. A segunda condição se traduz como $z = 800 + x + y$ ou $x + y - z = -800$. A terceira condição se escreve simbolicamente como $y = 1,5x$. Subtraindo as duas primeiras igualdades obtemos $z/2 = 800$ e $z = 1600$. Substituindo z na primeira equação, obtemos $x + y = 800$. Substituindo nesta equação $y = 1,5x$ obtemos $2,5x = 800$ e $x = 320$, $y = 480$.

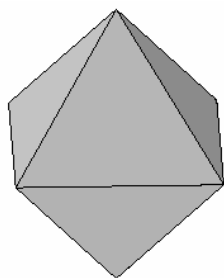
- 13.** Qual o menor inteiro positivo que deixa resto 2, quando dividido por 3; resto 3, quando dividido por 5, e resto 5, quando dividido por 7?

Resposta: 68

Justificativa:

Os naturais que deixam resto 2 quando divididos por 3 são 2, 5, 8, 13, ... e 8 também deixa resto 3 quando dividido por 5. Os naturais que deixam resto 2, quando divididos por 3, e resto 3, quando divididos por 5 são 8, 23, 38, 53, 68, .. e 68 também deixa resto 5 quando dividido por 7.

- 14.** Na ilustração a seguir, temos um octaedro regular com área total da superfície $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Indique o volume do octaedro, em cm^3 .



Resposta: 36

Justificativa:

Se a aresta do octaedro mede a cm, então, a área de sua superfície é $8 \cdot a^2 \sqrt{3} / 4 = 2 a^2 \sqrt{3} = 36 \sqrt{3}$ e

$a = 3\sqrt{2}$ cm. A altura de uma das pirâmides quadradas que formam metade do octaedro mede $\sqrt{(a\sqrt{3}/2)^2 - (a/2)^2} = a/\sqrt{2}$ cm, e o volume do octaedro

$$\text{será } 2 \cdot a^2 \cdot (a/\sqrt{2})/3 = a^3 \sqrt{2}/3 = 27 \cdot 2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/3 = 36 \text{ cm}^3.$$

15. Os alunos de uma turma cursam alguma(s) dentre as disciplinas Matemática, Física e Química. Sabendo que:

- o número de alunos que cursam Matemática e Física excede em 5 o número de alunos que cursam as três disciplinas;
 - existem 7 alunos que cursam Matemática e Química, mas não cursam Física;
 - existem 6 alunos que cursam Física e Química, mas não cursam Matemática;
 - o número de alunos que cursam exatamente uma das disciplinas é 150;
 - o número de alunos que cursam pelo menos uma das três disciplinas é 190.
- Quantos alunos cursam as três disciplinas?

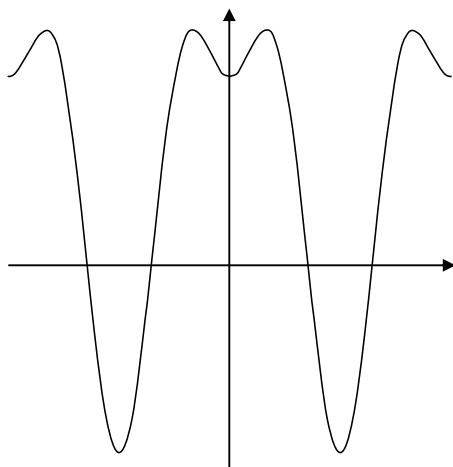
Resposta: 22

Justificativa:

O número de alunos que cursam exatamente uma disciplina é 150; o número de alunos que cursam exatamente duas disciplinas é $5 + 7 + 6 = 18$. O número de alunos que cursam as três disciplinas é $190 - 18 - 150 = 22$.

16. Quantas soluções a equação trigonométrica $\sin^2 x + \cos x = 5/4$ admite no intervalo $[0, 60\pi]$?

Parte do gráfico da função $\sin^2 x + \cos x$ está esboçada abaixo.



Resposta: 60

Justificativa:

Substituindo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ na equação obtemos $\cos^2 x - \cos x + 1/4 = 0$ que tem a raiz dupla $\cos x = 1/2$. A igualdade anterior tem as soluções $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$. Em cada ciclo completo, a equação admite duas soluções; logo, no intervalo $[0, 60\pi]$, admite $30 \cdot 2 = 60$ soluções.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

