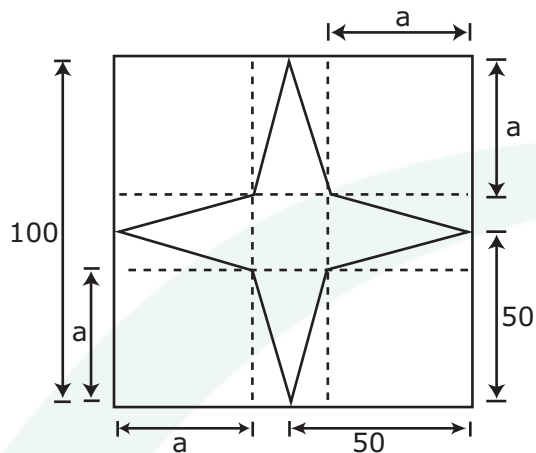


MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

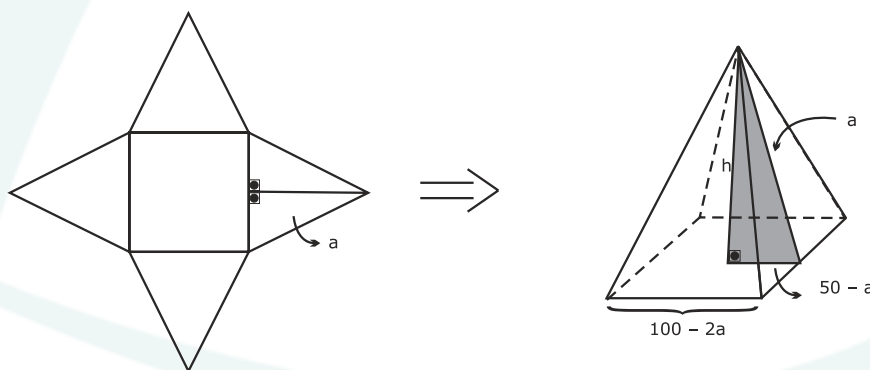
Uma pirâmide de base quadrada é construída recortando-se e dobrando-se uma cartolina quadrada de 100 cm de lado, como mostrado nesta figura:



Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** a altura da pirâmide em função de a .
2. **DETERMINE** o volume da pirâmide em função de a .
3. **DETERMINE** os valores de a para os quais se pode construir uma pirâmide da maneira descrita.

RESOLUÇÃO:



$$1. h^2 + (50 - a)^2 = a^2$$

$$h = 10\sqrt{a - 25} \text{ cm}$$

$$2. V_{\text{pir}} = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{10}{3} (100 - 2a)^2 \sqrt{a - 25} \text{ cm}^3$$

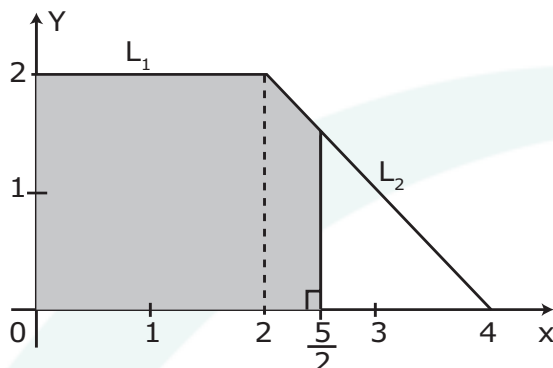
3.

$$\begin{cases} a - 25 > 0 \\ e \\ 100 - 2a > 0 \end{cases} \Rightarrow 25 \text{ cm} < a < 50 \text{ cm}$$

Matemática – Questão 02

(Constituída de três itens.)

Observe esta figura:



Nessa figura, L_1 e L_2 são segmentos de reta que ligam os pontos $(0,2)$, $(2,2)$ e $(4,0)$.

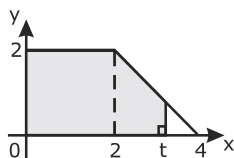
Uma função $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida associando-se a cada $t \in [0,4]$ o valor da área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = t$, $y = 0$ e a poligonal formada pelos segmentos L_1 e L_2 .

Por exemplo, o valor de $f\left(\frac{5}{2}\right)$ é a área da região sombreada na figura.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** os valores de $f(1)$ e $f(3)$.
2. **DETERMINE** as expressões de $f(t)$ para $0 \leq t \leq 2$ e para $2 < t \leq 4$.
3. **ESBOCE** o gráfico da função $f(t)$.

RESOLUÇÃO :

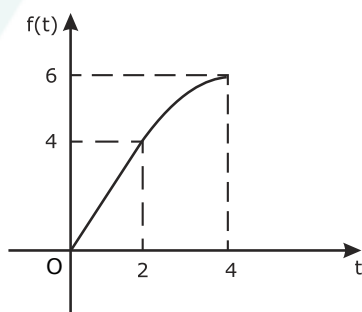


1. $f(1) = 2$
 $f(3) = 11/2$

2. $f(t) = 2t, 0 \leq t \leq 2$

$$f(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t - 2 = 4 + \frac{(6-t)(t-2)}{2}, \text{ se } 2 < t \leq 4$$

3.



Matemática – Questão 03

Sejam C_1 e C_2 circunferências de, respectivamente, centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 .
A equação de C_1 é $x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0$ e a equação de C_2 é $x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0$.
Sejam A e B os pontos de interseção de C_1 e C_2 .

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas de O_1 e O_2 e os raios r_1 e r_2 .
2. **DETERMINE** as coordenadas de A e B.
3. **CALCULE** a área do quadrilátero AO_1BO_2 .

RESOLUÇÃO:

$$1. C_1 : x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0 \begin{cases} O_1 (0, 5) \\ R_1 = \sqrt{10} \end{cases}$$
$$C_2 : x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0 \begin{cases} O_2 (-10, 0) \\ R_2 = \sqrt{85} \end{cases}$$

2. Interseções

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0 & (C_1) \\ x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0 & (C_2) \end{cases}$$

De C_1 e C_2 :

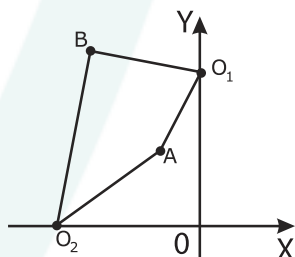
$$-10y = 20x \Rightarrow y = -2x$$

Substituindo em C_2 :

$$x^2 + 4x^2 + 20x + 15 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x' = -1 \\ x'' = -3 \end{matrix}$$

$$\boxed{A(-1, 2) \text{ e } B(-3, 6)}$$

3.



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} O_2 & B & O_1 & A & O_2 \\ -10 & -3 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A = 25}$$

Matemática – Questão 04

Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ um polinômio em que a e b são números inteiros.

Sabe-se que $1 + \sqrt{2}$ é uma raiz de $p(x)$.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** os coeficientes a e b .
2. **DETERMINE** todas as raízes de $p(x)$.

RESOLUÇÃO:

$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$, a e b inteiros.

1. $(1 + \sqrt{2})^3 + a(1 + \sqrt{2})^2 + b(1 + \sqrt{2}) + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$ e $\boxed{b = 3}$

2. Como $1 + \sqrt{2}$ é raiz e os coeficientes são inteiros, então $1 - \sqrt{2}$ também é raiz.

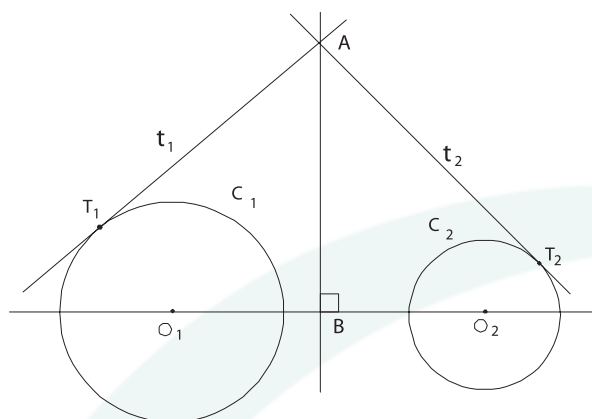
Soma das raízes = $-a = 4$

$1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + k = 4 \Rightarrow k = 2$

As raízes são $\boxed{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \text{ e } 2}$

Matemática – Questão 05

Observe esta figura:



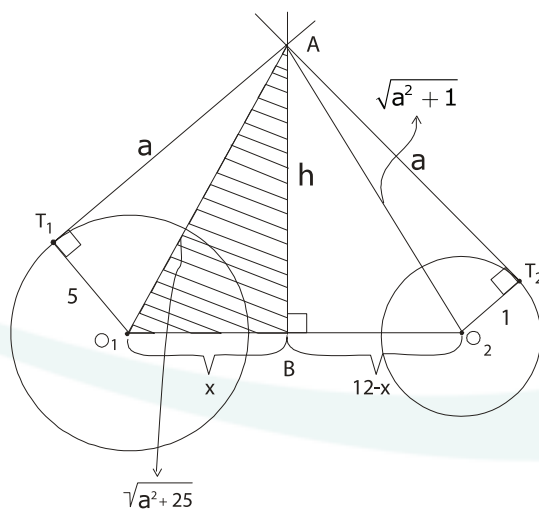
Nessa figura, as retas t_1 e t_2 são tangentes às circunferências C_1 e C_2 , respectivamente, nos pontos T_1 e T_2 . A reta AB é perpendicular à reta que passa pelos centros O_1 e O_2 das circunferências.

Sabe-se, também, que

$\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$; o raio de C_1 é 5 e o raio de C_2 é 1; e $O_1O_2 = 12$

Assim sendo, **CALCULE** $\overline{O_1B}$ e $\overline{O_2B}$

RESOLUÇÃO:



$$h^2 = a^2 + 25 - x^2 = a^2 + 1 - (12-x)^2 \Rightarrow x=7$$

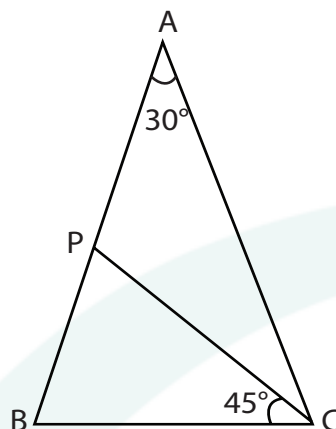
(duas vezes o teorema de Pitágoras)

$$\boxed{O_1B = 7}$$

$$\boxed{O_2B = 5}$$

Matemática – Questão 06

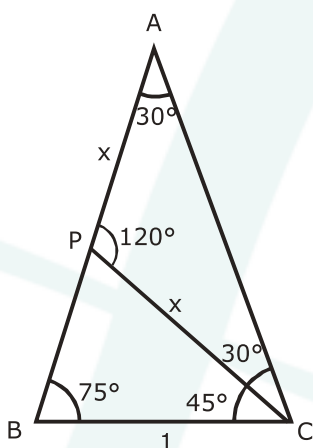
Observe esta figura:



Nessa figura, os comprimentos dos segmentos AB e AC são iguais. O comprimento do segmento BC é 1. Considerando essas informações,

1. **CALCULE** o comprimento do segmento CP.
2. **CALCULE** a área do triângulo ACP.

RESOLUÇÃO:



1. Lei dos senos

$$\frac{x}{\sin 75^\circ} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$x = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6} (3 + \sqrt{3})}$$

$$2. A_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow \boxed{A = \frac{2\sqrt{3} + 3}{12}}$$

Matemática – Questão 07

DETERMINE todos os números complexos que satisfazem estas condições:

$$\begin{cases} |z + 3| - 2\bar{z} = 3 + 6i \\ |z| < 4 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} |z + 3| - 2\bar{z} = 3 + 6i \\ |z| < 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} z = a + bi \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad |(a + 3) + bi| - 2(a - bi) = 3 + 6i$$

$$\sqrt{(a + 3)^2 + b^2} = (3 + 2a) + (6 - 2b)i$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 6 - 2b = 0 \Rightarrow b = 3 \\ \sqrt{(a + 3)^2 + b^2} = 3 + 2a \Rightarrow a' = -3 \text{ (não serve, pois } |z| < 4) \end{cases}$$

ou

$$a'' = 1$$

$$z = 1 + 3i$$

Matemática – Questão 08

Para um grupo de 12 pessoas, serão sorteadas viagens para três cidades distintas A, B e C. Cinco dessas pessoas irão para a cidade A; quatro, para a cidade B; e três, para cidade C.

Nesse grupo, estão Adriana, Luciana e Sílvio, que são amigos e gostariam de ir para a mesma cidade. Considerando essas informações, **RESPONDA:**

1. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a cidade A?
2. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a mesma cidade?
3. Qual é a probabilidade de Adriana, Luciana e Sílvio viajarem para a mesma cidade?

RESOLUÇÃO:

1. $C_{9,2} \cdot C_{7,4} \cdot C_{3,3} = 1260$

2. para A: 1260

para B: $C_{9,5} \cdot C_{4,1} \cdot C_{3,3} = 504$

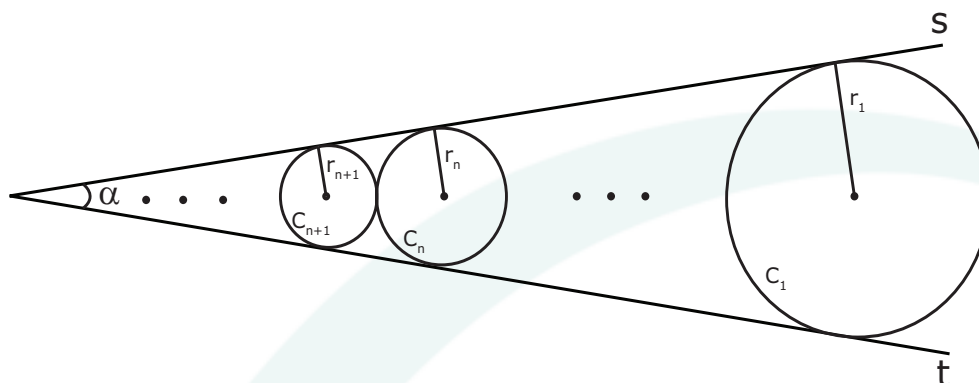
para C: $C_{9,5} \cdot C_{4,4} = 126$

soma : 1890

3. $P = \frac{1890}{C_{12,5} \cdot C_{7,4} \cdot C_{3,3}} = \frac{3}{44}$

Matemática – Questão 09

Observe esta figura:



Nessa figura, está representada uma sequência infinita de círculos $C_1, C_2, C_3, \dots$, que tangenciam as retas s e t . Cada círculo C_n tangencia o próximo círculo C_{n+1} . Para todo número natural positivo n , r_n é o raio do círculo C_n .

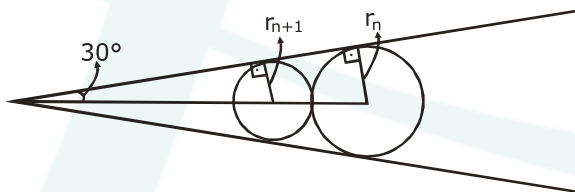
Sabe-se que:

- $\alpha = 60^\circ$;
- $r_1 = 1$.

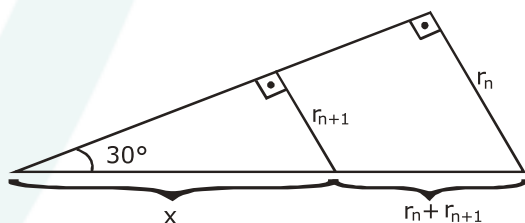
Considerando essas informações,

1. **MOSTRE** que $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1}{3}$ para todo n .
2. **DETERMINE** r_n em função de n .
3. **CALCULE** a soma das áreas de todos os círculos $C_1, C_2, C_3, \dots$

RESOLUÇÃO:



1.



$$\text{sen}30^\circ = \frac{r_{n+1}}{x} = \frac{r_n}{x + r_n + r_{n+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2r_{n+1} \\ e \\ x + r_n + r_{n+1} = 2r_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1}{3}}$$

$$2 \cdot r_{k+1} = \frac{1}{3} r_k$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = \frac{1}{3}$$

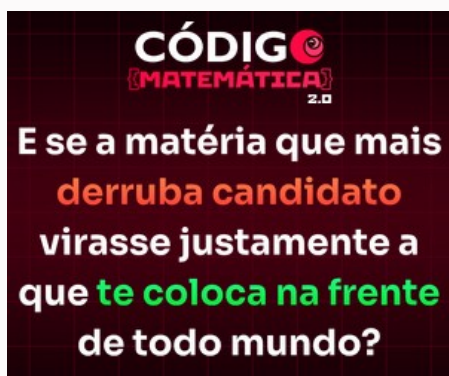
$$r_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \dots \boxed{r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$$3. \text{ Soma} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots) \Rightarrow S = \pi \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \right] = \pi \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9\pi}{8}$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

