

### PISM 3 – QUESTÕES ABERTAS – GABARITO

1) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos  $A(2,5)$ ,  $B(6,-3)$  e  $C(10,-1)$ .

**Solução:**

Sejam  $r$  a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e  $s$  a reta que passa pelos pontos  $B$  e  $C$ .

Coefficientes angulares das retas  $r$  e  $s$ :

$$a_r = \frac{-3-5}{6-2} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{e} \quad a_s = \frac{-1+3}{10-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente. Então tem-se:

$$M = \left( \frac{2+6}{2}, \frac{5-3}{2} \right) = (4,1) \text{ e}$$

$$N = \left( \frac{6+10}{2}, \frac{-3-1}{2} \right) = (8,-2).$$

Sejam  $m$  e  $n$  as mediatrizes dos segmentos  $\overline{AB}$  e

$\overline{BC}$ , respectivamente. Como essas retas são perpendiculares às retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, tem-se que:

$$\text{Coeficiente angular das retas } m \text{ e } n: a_m = -\frac{1}{a_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a_n = -\frac{1}{a_s} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

$$\text{Equação da reta } m: y-1 = \frac{1}{2}(x-4) \text{ ou } y = \frac{1}{2}x-1.$$

$$\text{Equação da reta } n: y+2 = -2(x-8) \text{ ou } y = -2x+14.$$

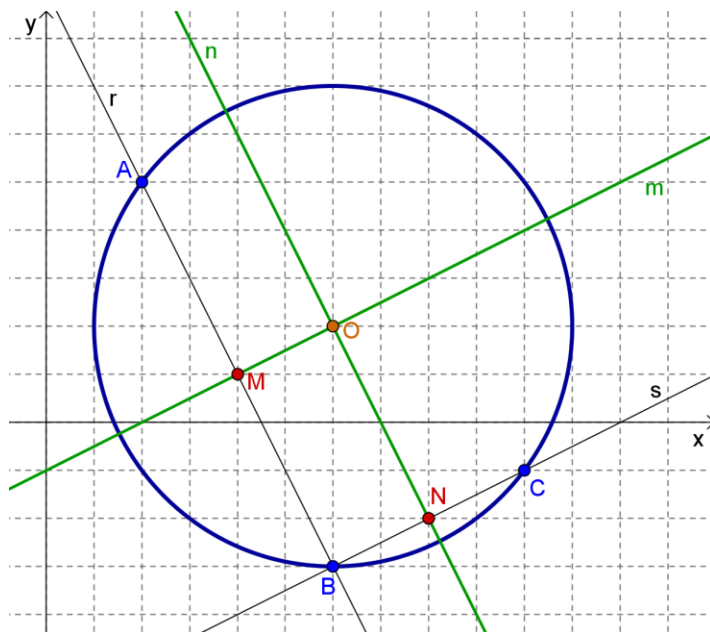
$$\text{O centro } O \text{ da circunferência se encontra na interseção das retas } m \text{ e } n. \text{ Resolvendo o sistema } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x-1 \\ y = -2x+14 \end{cases},$$

encontra-se  $x=6$  e  $y=2$ , que são as coordenadas do centro da circunferência.

O raio  $R$  dessa circunferência é dado, por exemplo, como a medida do segmento  $\overline{OA}$ . Então

$$R = d(O, A) = \sqrt{(6-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Portanto, a equação da circunferência é  $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 25$ .



2) Considere o sistema

$$\begin{cases} (a+1)z = b \\ x + az = 0 \\ ay + z = 2 \\ x + ay + (a+1)z = 2 \end{cases}$$

sendo  $a \neq -1$ .

Classifique o sistema em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

### 1ª Solução:

Note inicialmente que a 4ª equação pode ser obtida somando-se a 2ª e a 3ª equações do sistema. Portanto, pode-se desconsiderar a 4ª equação do sistema dado, pois esta é redundante, não agrega nova informação.

Como  $a \neq -1$ , da 1ª equação tem-se  $z = \frac{b}{a+1}$ . Substituindo esse valor de  $z$  na:

- 2ª equação, obtém-se:  $x = -\frac{ab}{a+1}$ ;
- 3ª equação, obtém-se:  $ay = 2 - \frac{b}{a+1}$ , ou seja,  $ay = \frac{2a+2-b}{a+1}$ , donde  $y = \frac{2a+2-b}{a(a+1)}$ , para  $a \neq 0$ .

Portanto, o sistema tem solução única se  $a \neq -1$  e  $a \neq 0$ .

Finalmente, se  $a = 0$ , o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} z = b \\ x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

que só terá solução se  $b = 2$  e, nesse caso terá infinitas soluções pois todo terno ordenado da forma  $(0, y, 2)$  será uma solução do sistema, qualquer que seja  $y$ . Assim, se  $a = 0$  e  $b \neq 2$ , o sistema não terá solução.

Assim, o sistema

- a) admite solução única quando  $a \neq -1$  e  $a \neq 0$ , qualquer que seja  $b$ .
- b) admite infinitas soluções quando  $a = 0$  e  $b = 2$ .
- c) não admite solução quando  $a = 0$  e  $b \neq 2$ .

## 2ª Solução:

Da 1ª equação tem-se:  $z = \frac{b}{a+1}$ , já que  $a \neq -1$ . Substituindo esse valor de  $z$  na 2ª e 3ª equações obtém-se, respectivamente,  $x = -\frac{ab}{a+1}$  e  $y = \frac{2a+2-b}{a(a+1)}$ , isto para  $a \neq 0$ .

Verificando estes valores na 4ª equação tem-se:

$$x + ay + (a+1)z = \left(-\frac{ab}{a+1}\right) + a\left(\frac{2a+2-b}{a(a+1)}\right) + (a+1)\left(\frac{b}{a+1}\right) = -\frac{ab}{a+1} + \frac{2a+2-b}{(a+1)} + b = \frac{2(a+1)}{a+1} = 2, \text{ já que } a \neq -1. \text{ Logo, para } a \neq -1 \text{ e } a \neq 0, \text{ o sistema tem solução única, que é dada por}$$

$$S = \left\{ \left( -\frac{ab}{a+1}, \frac{2a+2-b}{a(a+1)}, \frac{b}{a+1} \right) \right\}.$$

Finalmente, se  $a = 0$ , o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} z = b \\ x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

que só terá solução se  $b = 2$  e, nesse caso terá infinitas soluções pois todo terno ordenado da forma  $(0, y, 2)$  será uma solução do sistema, qualquer que seja  $y$ . Assim, se  $a = 0$  e  $b \neq 2$ , o sistema não terá solução.

3) Seja  $p(x)$  um polinômio tal que  $p(0)=1$  e  $p(2)=p(-2)=9$ . Determine o resto da divisão de  $p(x)$  por  $q(x)=x(x^2-4)$ .

**Solução:**

Sabe-se que

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x) = [x(x^2 - 4)]d(x) + r(x) \quad (*)$$

onde  $d(x)$  e  $r(x)$  são respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de  $p(x)$  por  $q(x)$ , ou seja,  $\text{gr}[r(x)] < \text{gr}[q(x)] = 3$ . Daí resulta que  $\text{gr}[r(x)] \leq 2$ .

Logo  $r(x) = ax^2 + bx + c$ , para certos  $a, b$  e  $c$  reais.

Como são conhecidos os valores de  $p(0)$ ,  $p(2)$  e de  $p(-2)$ , calcularemos seus valores a partir de (\*):

$$p(0) = q(0)d(0) + r(0) = [0(0^2 - 4)]d(0) + r(0) = r(0) = c$$

$$p(2) = q(2)d(2) + r(2) = [2(2^2 - 4)]d(2) + r(2) = r(2) = 4a + 2b + c$$

$$p(-2) = q(-2)d(-2) + r(-2) = [(-2)((-2)^2 - 4)]d(-2) + r(-2) = r(-2) = 4a - 2b + c$$

Daí se obtém o sistema:

$$\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ 4a - 2b + c = 9 \end{cases}$$

Donde se obtém:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 8 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases}$$

Somando as duas equações tem-se  $a = 2$  e, conseqüentemente,  $b = 0$ .

Logo, o resto da divisão do polinômio de  $p(x)$  por  $q(x)$  é o polinômio  $r(x) = 2x^2 + 1$ .

4) Seja  $p(x) = ax^2 - 2x - (3a + 2)$  sendo  $a \neq 0$ .

a) Mostre que  $p(x)$  tem duas raízes distintas.

**Solução:**

Tem-se que

$$\Delta = (-2)^2 - 4a[-(3a + 2)] = 4 + 12a^2 + 8a = 4(3a^2 + 2a + 1).$$

Considerando agora o trinômio  $q(a) = 3a^2 + 2a + 1$ , tem-se que:

$$\Delta_1 = 2^2 - 4(3)(1) = -8 < 0.$$

Portanto,  $q(a) > 0$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Consequentemente,  $\Delta > 0$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , já que  $\Delta = 4 \cdot q(a)$ .

Assim,  $p(x)$  tem duas raízes distintas, qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}^*$ .

b) Suponha que as raízes  $x_1$  e  $x_2$  de  $p(x)$  satisfaçam  $x_1 < 1 < x_2$ . Mostre que  $a \cdot p(1) < 0$ .

**Solução:**

Há dois casos a serem analisados:

1º)  $a > 0$ . Neste caso a parábola tem concavidade voltada para cima e como 1 está entre as raízes  $x_1$  e  $x_2$  de  $p(x)$ , segue que  $p(1) < 0$ . Logo,  $a \cdot p(1) < 0$ .

2º)  $a < 0$ . Neste caso a parábola tem concavidade voltada para baixo e como 1 está entre as raízes  $x_1$  e  $x_2$  de  $p(x)$ , segue que  $p(1) > 0$ . Logo,  $a \cdot p(1) < 0$ .

Portanto,  $a \cdot p(1) < 0$ .

c) Calcule os valores de  $a$  para que as raízes  $x_1$  e  $x_2$  do polinômio  $p(x)$  satisfaçam a relação  $x_1 < 1 < x_2$ .

**Solução:**

Se as raízes  $x_1$  e  $x_2$  de  $p(x)$  satisfazem  $x_1 < 1 < x_2$ , então, do item (b) pode-se afirmar que  $a \cdot p(1) < 0$ .

$$\text{Mas } p(1) = a - 2 - (3a + 2) = -2a - 4.$$

Assim,  $a(-2a - 4) = -2a^2 - 4a < 0$ , donde  $a^2 + 2a > 0$ , ou seja,  $a(a + 2) > 0$ .

Daí vem que  $a < -2$  ou  $a > 0$ .

5) Dada uma reta  $r$  no plano, seu coeficiente angular  $m_r$  fornece sua inclinação em relação ao eixo das abscissas, e é definido pela tangente de  $\theta$ , onde  $0 \leq \theta < \pi$  e  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , sendo  $\theta$  o ângulo que a reta  $r$  forma com o semi-eixo positivo das abscissas. O coeficiente angular pode ser facilmente calculado se conhecemos dois pontos  $P(x_P, y_P)$  e  $Q(x_Q, y_Q)$  pertencentes à reta  $r$ .

$$\text{De fato } m_r = \operatorname{tg} \theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$

Dados três ou mais pontos no plano, dizemos que eles são colineares se pertencem a uma mesma reta.

Usando a noção de coeficiente angular, verifique se os pontos  $A(-1, 2)$ ,  $B(1, 3)$  e  $C(6, 6)$  são colineares.

**Solução:**

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  serão colineares se pertencerem à uma mesma reta.

Seja  $m_s$  o coeficiente angular da reta  $s$  definida pelos pontos  $A$  e  $B$ . Então:

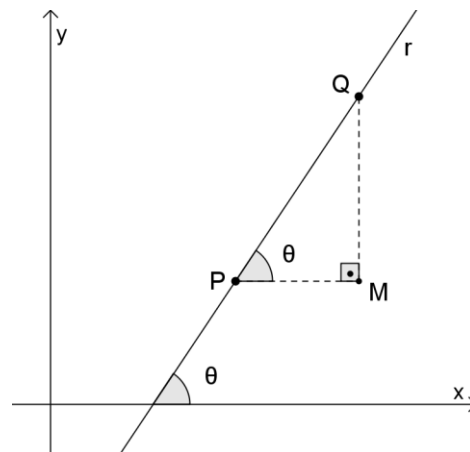
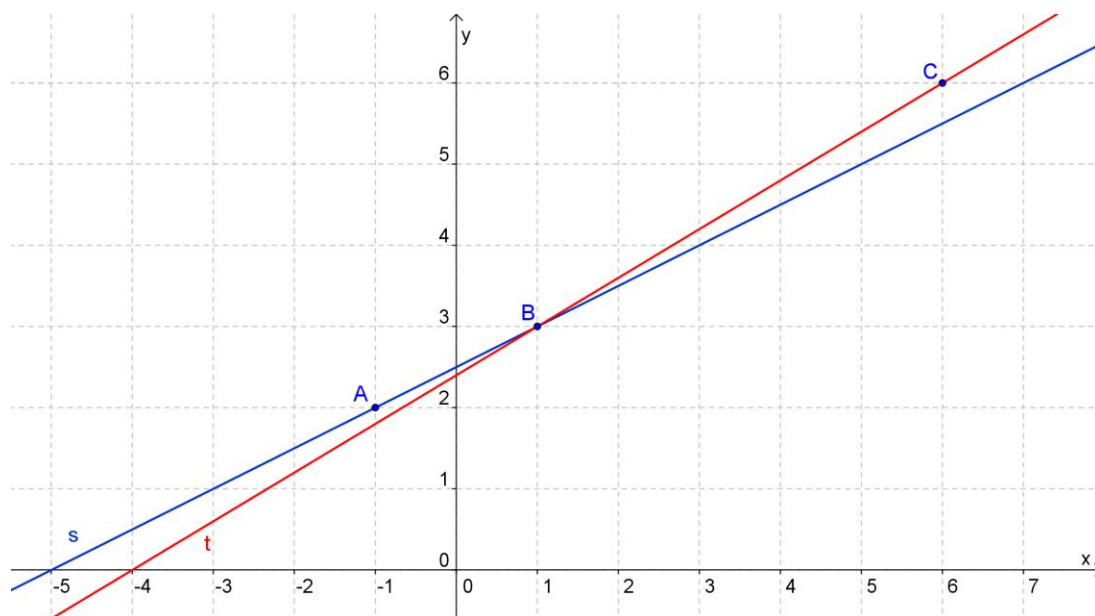
$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Seja  $m_t$  o coeficiente angular da reta  $t$  definida pelos pontos  $B$  e  $C$ . Então:

$$m_t = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5}.$$

Comparando os valores encontrados para  $m_s$  e  $m_t$  concluímos que a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  é distinta daquela que passa pelos pontos  $B$  e  $C$ .

Portanto os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares. Veja a representação abaixo.



## Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



### Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



### Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



### Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

