

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 1

a)

Se 6,8 milhões de toneladas correspondem a 18% do total transportado, então 100% correspondem a $6,8/0,18 \approx 37,8$ milhões de toneladas.

No primeiro semestre de 2007, foram transportadas por dutos $37,8 - 6,8 - 29,1 = 1,9$ milhão de toneladas.

Resposta: No primeiro semestre de 2007, a carga transportada ao porto de Santos foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos.

a')

Se 29,1 milhões de toneladas correspondem a 77% do total transportado, então 100% correspondem a $29,1/0,77 \approx 37,8$ milhões de toneladas.

No primeiro semestre de 2007, o transporte dutoviário teve uma participação de $100 - 18 - 77 = 5\%$ do total transportado ao porto. Assim, foram transportadas $37,8 \times 0,05 \approx 1,9$ milhão de toneladas por dutos.

Resposta: No primeiro semestre de 2007, a carga transportada ao porto de Santos foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos.

b)

No primeiro semestre de 2008, foram transportadas $29,1 - 2,7 = 26,4$ milhões de toneladas de carga. Se 8,8 milhões de toneladas correspondem a 24% do total transportado, então 26,4 milhões de toneladas correspondem a $26,4 \times 24 / 8,8 = 3 \times 24 = 72\%$ da carga total.

Resposta: No primeiro semestre de 2008, o transporte de 72% da carga enviada ao porto de Santos foi feito por rodovias.

b')

No primeiro semestre de 2008, foram transportadas $29,1 - 2,7 = 26,4$ milhões de toneladas de carga. Se 8,8 milhões de toneladas correspondem a 24% do total transportado, então a carga transportada nesse período é igual a $8,8/0,24 \approx 36,7$ milhões de toneladas. Assim, o percentual transportado por rodovias corresponde a $26,4 \times 100 / 36,7 \approx 72\%$ do total.

Resposta: No primeiro semestre de 2008, o transporte de 72% da carga enviada ao porto de Santos foi feito por rodovias.

Questão 2

a)

Para manter a lâmpada incandescente acesa por 750 horas, gasta-se $750 \times 0,1 \times 0,5 = \text{R\$ } 37,50$ com o consumo de energia.

Já para manter a lâmpada fluorescente acesa pelo mesmo período, gasta-se $750 \times 0,024 \times 0,5 = \text{R\$ } 9,00$.

Resposta: O gasto com a lâmpada incandescente atinge R\$ 37,50, enquanto o gasto com a lâmpada fluorescente é igual a R\$ 9,00.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)

Se d é o número de dias transcorridos desde a compra das lâmpadas, podemos dizer que o gasto de João com cada ponto de luz da casa é dado por $J(d) = 13,4 + 0,5 \times 0,024 \times 3d = 13,4 + 0,036d$. Já o gasto de Fernando com cada ponto de luz é dado por $F(d) = 2 + 0,5 \times 0,1 \times 3d = 2 + 0,15d$.

Considerando $J(d) < F(d)$, obtemos $13,4 + 0,036d < 2 + 0,15d$, ou $(0,15 - 0,036)d > (13,4 - 2)$, ou ainda $0,114d > 11,4$. Logo, $d > 11,4/0,114 = 100$.

Resposta: Depois de 100 dias, Fernando terá gasto mais com iluminação do que João.

Questão 3

a)

O número de forminhas azuis é igual a $F_A = 2n + 2(m - 2) = 2n + 2m - 4$. Já o número de forminhas vermelhas é igual a $F_V = (n - 2)(m - 2) = nm - 2m - 2n + 4$.

Igualando as duas expressões, obtemos $4n + 4m - mn - 8 = 0$. Como $m = 3n/4$, temos $7n - 3n^2/4 - 8 = 0$, ou $3n^2 - 28n + 32 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$n = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 3 \cdot 32}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm 20}{6}$$

Assim, $n = 8$ ou $n = 4/3$. Como n deve ser um número inteiro, concluímos que $n = 8$ e $m = 3 \times 8/4 = 6$, de modo que a bandeja tem $6 \times 8 = 48$ brigadeiros.

Resposta: A bandeja tem 48 brigadeiros.

a')

O número de forminhas vermelhas é igual a $F_V = (n - 2)(m - 2) = nm - 2m - 2n + 4$. Já o número de forminhas azuis é a metade do número total de forminhas, ou seja, $F_A = nm/2$.

Igualando as duas expressões, obtemos $nm/2 - 2m - 2n + 4 = 0$. Como $n = 4m/3$, temos $2m^2/3 - 14m/3 - 4 = 0$, ou $m^2 - 7m + 6 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$m = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

Assim, $m = 6$ ou $m = 1$. No primeiro caso, $n = 4 \cdot 6/3 = 8$. No segundo caso, $n = 4 \cdot 1/3 = 4/3$. Como n deve ser um número inteiro, concluímos que $n = 8$ e $m = 6$, de modo que a bandeja tem $6 \times 8 = 48$ brigadeiros.

Resposta: A bandeja tem 48 brigadeiros.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

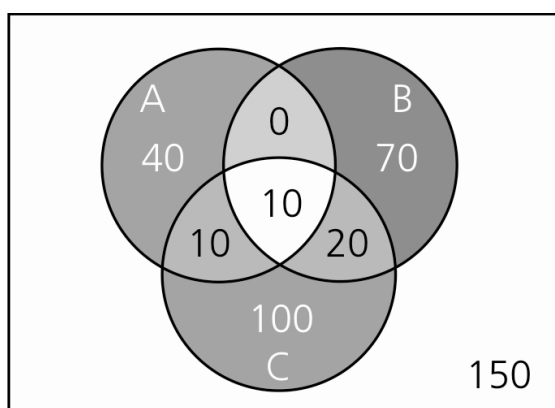
b)

Cada brigadeiro tem 1 cm de raio. Assim, sem contar o chocolate granulado, o volume de um brigadeiro é igual a $4\pi r^3/3 = 4\pi/3 \approx 4 \times 3,14/3 \approx 4,19 \text{ cm}^3$.

Logo, somando os 400 brigadeiros, obtemos um volume total aproximado de $400 \times 4,19 = 1676 \text{ cm}^3$. Como 1 litro corresponde a 1000 cm^3 , 400 brigadeiros correspondem a cerca de $1676/1000 = 1,676$ litros. Portanto, é necessário comprar 2 latas da massa pronta.

Resposta: A pessoa tem que comprar 2 latas da massa de brigadeiro.

Questão 4



a)

O diagrama ao lado fornece as informações que podem ser extraídas do enunciado. Como se vê, o número de sócios que poderiam votar em B ou em C, mas não em A, é dado por $|B \cap C \cap (\neg A)| = 190 - 70 - 100 = 20$.

Por outro lado, o número de sócios que pretendem participar da eleição mas não votariam em B é dado por $|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C \cap (\neg A)| = 40 + 10 + 100 = 150$.

Resposta: 20 sócios estão em dúvida entre os candidatos B e C, mas não votariam em A. Dentre os sócios que pretendem participar da eleição, 150 não votariam no candidato B.

b)

O número de entrevistados é igual a $150 + 40 + 70 + 100 + 0 + 10 + 20 + 10 = 400$. O número de entrevistados em dúvida é igual a $|A \cap C \cap (\neg B)| + |A \cap B \cap (\neg C)| + |B \cap C \cap (\neg A)| + |A \cap B \cap C| = 10 + 0 + 20 + 10 = 40$.

Assim, se escolhermos um dos 400 entrevistados ao acaso, a probabilidade de ele ainda não ter decidido em qual candidato irá votar é igual a $40/400 = 0,1$. Como a pesquisa reflete fielmente a realidade, a probabilidade de um sócio ainda não ter decidido em quem votar é igual a 0,1, ou 10%.

Resposta: A probabilidade de um sócio não ter escolhido ainda o seu candidato é igual a 0,1, ou 10%.

b')

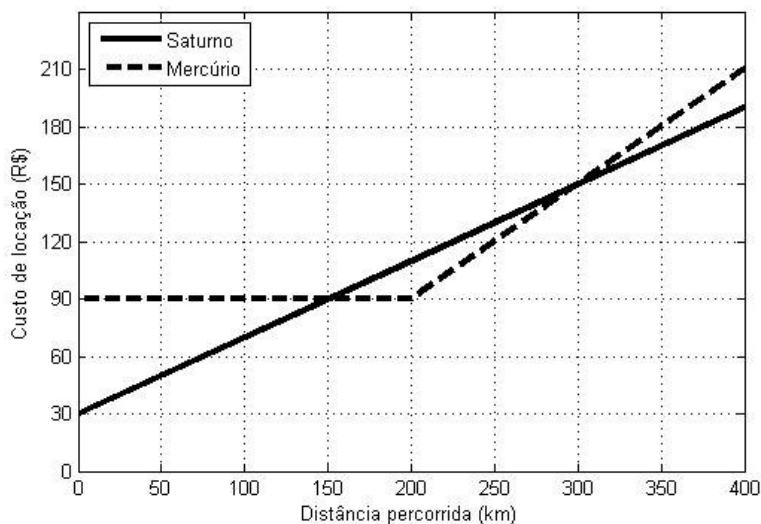
O número de entrevistados é igual a $150 + 40 + 70 + 100 + 0 + 10 + 20 + 10 = 400$. O número de entrevistados em dúvida é igual a $|A \cap C \cap (\neg B)| + |A \cap B \cap (\neg C)| + |B \cap C \cap (\neg A)| + |A \cap B \cap C| = 10 + 0 + 20 + 10 = 40$.

Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, a probabilidade de que ele participe da eleição é igual a $250/400$. Considerando, agora, apenas os entrevistados que participarão da eleição, a probabilidade de que um deles, escolhido ao acaso, esteja em dúvida é igual a $40/250$. Assim, se escolhermos um dos sócios ao acaso, a probabilidade de ele ainda não ter decidido em qual candidato irá votar é igual a $(250/400) \cdot (40/250) = 0,1$. Como a pesquisa reflete fielmente a realidade, a probabilidade de um sócio ainda não ter decidido em quem votar é igual a 0,1, ou 10%.

Resposta: A probabilidade de um sócio não ter escolhido ainda o seu candidato é igual a 0,1, ou 10%.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 5



a)

As funções que descrevem o custo diário de locação em função de d , a distância percorrida por dia, são:

$$c_S(d) = 30 + 0,4d$$

$$c_M(d) = \begin{cases} 90, & \text{se } d \leq 200; \\ 90 + 0,6(d - 200), & \text{se } d > 200. \end{cases}$$

Essas funções estão representadas no gráfico ao lado.

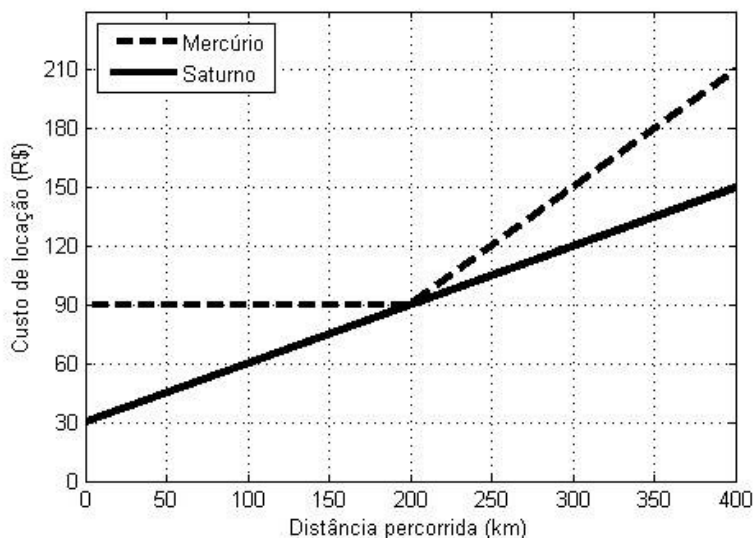
b)

Para encontrar o primeiro ponto de interseção das curvas, resolvemos a equação $30 + 0,4d = 90$. Neste caso, $d = 60/0,4 = 150$ km.

O segundo ponto de interseção é dado pela solução de $30 + 0,4d = 90 + 0,6(d - 200)$. Simplificando esta equação, obtemos $0,2d = 60$, de modo que $d = 300$. Como se observa, para $150 \leq d \leq 300$, a locadora Mercúrio é a mais barata. Nos outros intervalos a Saturno tem o plano mais barato.

Para que a locadora Saturno obtenha o maior lucro possível e seja sempre a mais vantajosa, é necessário que a curva que descreve seu custo passe pelo ponto $(200, 90)$, como mostra o gráfico ao lado. Suponha, então, que c seja seu novo custo por quilômetro. Neste caso, devemos ter $30 + 200c = 90$, ou $c = 60/200 = \text{R\$ } 0,30$.

Resposta: A locadora Mercúrio é a mais barata para distâncias maiores que 150 km e menores que 300 km. Para distâncias menores que 150 km ou maiores que 300km, a Saturno é a mais barata. Para que seja sempre a mais vantajosa, a locadora Saturno deve cobrar R\$ 0,30 por quilômetro rodado.



RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 6

a)

Existem $C_{8,2} = 8 \times 7 / 2 = 28$ pares diferentes de ingressos que podem ser dados para o casal. Dentre esses pares de ingressos, existem exatamente 7 que correspondem a cadeiras vizinhas. Assim, a probabilidade de o casal ter recebido um par de ingressos de cadeiras vizinhas é igual a $7/28 = 1/4$, ou 25%.

Resposta: A probabilidade de o casal ter recebido ingressos consecutivos é de 1/4, ou 25%.

a')

Existem $P_8 = 8!$ maneiras diferentes de distribuir 8 ingressos entre 8 pessoas. Dessas formas de distribuir os ingressos, o casal recebe bilhetes consecutivos em $P_2 \cdot P_7 = 2! \cdot 7!$ dos casos. Assim, a probabilidade de o casal ter recebido um par de ingressos de cadeiras vizinhas é igual a $2! \cdot 7! / 8! = 1/4$, ou 25%.

Resposta: A probabilidade de o casal ter recebido ingressos consecutivos é de 1/4, ou 25%.

b)

O número de cadeiras na fila k é igual a $c_k = 6 + 2k$. Somando o número de cadeiras das n filas, obtemos

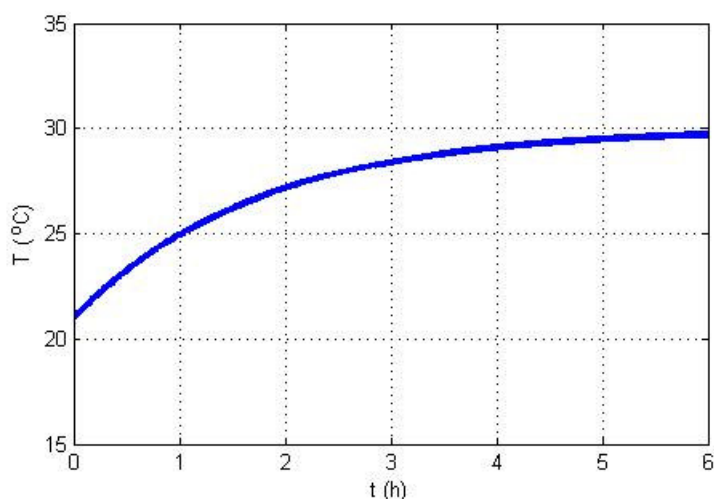
$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n (6 + 2k) = \frac{n(8 + 6 + 2n)}{2} = 7n + n^2$. Se o teatro tem 144 cadeiras, então $7n + n^2 = 144$, ou $n^2 + 7n - 144 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 25}{2}.$$

Assim, $n = -16$ ou $n = 9$. Como $n > 0$, o teatro tem 9 filas.

Resposta: O teatro tem $n^2 + 7n$ cadeiras. Se há 144 cadeiras, estas estão dispostas em 9 filas.

Questão 7



a)

Passadas 4 horas da quebra do aparelho de ar condicionado, a temperatura dentro do ônibus era igual a $T(4) = 30 - 9 \times 10^{-1} = 29,1^\circ\text{C}$.

O gráfico da função $T(t)$ é apresentado ao lado. Como se observa, a função vale 21 quando $t = 0$ e se aproxima de 30 à medida que t cresce.

Resposta. Quando $t = 4$ h, a temperatura atingiu $29,1^\circ\text{C}$. O gráfico de $T(t)$ é dado ao lado.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)

O instante desejado é aquele no qual $T(t) = 21 + 4 = 25^{\circ}\text{C}$, ou seja, precisamos determinar t , tal que $30 - 9 \times 10^{-t/4} = 25$. Assim, temos $10^{-t/4} = 5/9$.

Aplicando o logaritmo (na base 10) nos dois lados da equação, obtemos $-t/4 = \log(5) - \log(3^2)$, ou seja, $t = 4(2\log(3) - \log(5)) \approx 4(2 \times 0,48 - 0,70) = 1,04$ hora. Logo, $t = 1\text{h}2\text{m}24\text{s}$.

Resposta: A temperatura subiu 4°C depois de transcorrida 1,04 hora, ou 1h2m24s.

Questão 8

a)

Os dados do enunciado nos permitem formular o seguinte sistema de equações lineares, no qual cada equação está associada a uma papelaria:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 23 \\x + y + 4z &= 25\end{aligned}$$

Multiplicando a segunda linha por -2 e somando o resultado à primeira linha, obtemos $-x - 5z = -27$. Assim, $x = 27 - 5z$.

Subtraindo, agora, a segunda linha da primeira, obtemos $y - z = -2$, de modo que $y = z - 2$.

Resposta: $x = 27 - 5z$ e $y = z - 2$.

b)

Tomando $y \geq 1$, temos $z - 2 \geq 1$, ou seja, $z \geq 3$. Da mesma forma, exigindo que $x \geq 1$, temos $27 - 5z \geq 1$, ou $z \leq 27/5$. Como z precisa ser um número inteiro, concluímos que $z \leq 5$. Assim, $3 \leq z \leq 5$.

Para $z = 3$, temos $y = 1$ e $x = 12$. Para $z = 4$, temos $y = 2$ e $x = 7$. Finalmente, para $z = 5$, temos $y = 3$ e $x = 2$.

Resposta: As quantidades possíveis são $(x, y, z) = (12, 1, 3)$, ou $(x, y, z) = (7, 2, 4)$, ou ainda $(x, y, z) = (2, 3, 5)$.

Questão 9

a)

A parte superior do sapo é um pentágono. Sua área é dada pela soma das áreas de um retângulo e de um triângulo. O retângulo tem lados iguais a $c/4$ e $c/2$, de modo que sua área é de $(c/4)(c/2) = c^2/8$. O triângulo tem base igual a $c/2$ e altura $c/4$, fornecendo uma área de $(c/2)(c/4)/2 = c^2/16$. Logo, a área total da parte superior é de $3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2 , é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, $c = 8\text{ cm}$.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter 12 cm^2 , é preciso que o retângulo tenha $8 \times 16\text{ cm}$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

a')

A parte superior do sapo é um pentágono, cuja área é o dobro da área de um trapézio com bases paralelas de comprimento $c/4$ e $c/2$, e com altura $c/4$. A área de tal trapézio é igual a $A_T = (1/2) \cdot (c/4 + c/2) \cdot (c/4) = 3c^2/32$. Logo, a área total da parte superior é $2A_T = 3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2 , é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, $c = 8 \text{ cm}$.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter 12 cm^2 , é preciso que o retângulo tenha $8 \times 16 \text{ cm}$.

a'')

A parte superior do sapo é um pentágono, cuja área é dada por $A_G - 2A_p$, onde A_G é a área de um triângulo com base c e altura $c/2$, e A_p é a área de um triângulo com base e altura iguais a $c/4$. Assim, $A_G = c \cdot (c/2)/2 = c^2/4$ e $A_p = (c/4)^2/2 = c^2/32$. Assim, a área do pentágono é de $c^2/4 - 2c^2/32 = 3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2 , é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, $c = 8 \text{ cm}$.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter 12 cm^2 , é preciso que o retângulo tenha $8 \times 16 \text{ cm}$.

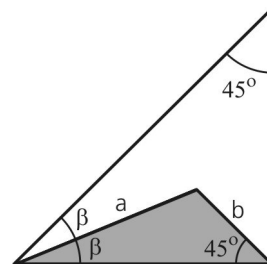
b)

A partir da figura fornecida no enunciado, podemos concluir que $2\beta = 45^\circ$, de modo que $\beta = 22,5^\circ$.

A lei dos senos nos fornece a equação $a/\sin(45^\circ) = b/\sin(22,5^\circ)$, de modo que $a/b = \sin(45^\circ)/\sin(22,5^\circ)$.

Como $\sin(45^\circ) = \sin(22,5^\circ + 22,5^\circ) = 2\sin(22,5^\circ)\cos(22,5^\circ)$, concluímos que $a/b = 2\cos(22,5^\circ)$.

Para calcular $\cos(22,5^\circ)$, usamos a fórmula $\cos(45^\circ) = \cos^2(22,5^\circ) - \sin^2(22,5^\circ)$, que fornece $\cos(45^\circ) = 2\cos^2(22,5^\circ) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22,5^\circ) = (\cos(45^\circ) + 1)/2 = (\sqrt{2}/2 + 1)/2 = (\sqrt{2} + 2)/4$. Logo, $\cos(22,5^\circ) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$, donde $a/b = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.



Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

b')

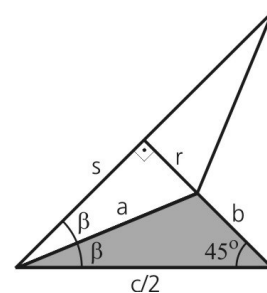
Observando a figura ao lado, concluímos que $2\beta = 45^\circ$, de modo que $\beta = 22,5^\circ$.

Assim, $(r + b) = s$. Mas $r = a \cdot \sin(\beta)$ e $s = a \cdot \cos(\beta)$, de modo que $b = s - r = a[\cos(\beta) - \sin(\beta)]$. Logo, $a/b = 1/[\cos(\beta) - \sin(\beta)]$.

Para calcular $\cos(22,5^\circ)$, usamos a fórmula $\cos(45^\circ) = \cos^2(22,5^\circ) - \sin^2(22,5^\circ)$, que fornece $\cos(45^\circ) = 2\cos^2(22,5^\circ) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22,5^\circ) = (\cos(45^\circ) + 1)/2 = (\sqrt{2}/2 + 1)/2 = (\sqrt{2} + 2)/4$. Logo, $\cos(22,5^\circ) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$.

Para obter $\sin(22,5^\circ)$, basta fazer $\sin(22,5^\circ) = \sqrt{1 - \cos^2(22,5^\circ)} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$. Assim,

$$a/b = 2/\left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right].$$



Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2/\left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right]$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b'')

Observando a figura do item (b'), concluímos que $2\beta = 45^\circ$, de modo que $\beta = 22,5^\circ$.

Pelo teorema da bissetriz interna, temos $s/r = (c/2)/b$. Como $(c/2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem s , temos também $(c/2)^2 = 2s^2$, ou $c/2 = s\sqrt{2}$.

Voltando ao teorema, obtemos $s/r = s\sqrt{2}/b$, ou simplesmente $b = r\sqrt{2}$. Mas $r = a \cdot \sin(\beta)$, de modo que $b = a \cdot \sin(\beta)\sqrt{2}$, o que implica que $a/b = 1/[\sin(\beta)\sqrt{2}]$.

Para calcular $\sin(22,5^\circ)$, usamos a fórmula $\cos(45^\circ) = \cos^2(22,5^\circ) - \sin^2(22,5^\circ)$, que fornece $\cos(45^\circ) = 1 - 2\sin^2(22,5^\circ)$. Deste modo, $\sin^2(22,5^\circ) = (1 - \cos(45^\circ))/2 = (2 - \sqrt{2})/4$, e $\sin(22,5^\circ) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$.

Logo, $a/b = 2/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

b''')

Observando a figura do item (b'), concluímos que $2\beta = 45^\circ$, de modo que $\beta = 22,5^\circ$.

A lei dos cossenos nos fornece a equação $b^2 = (c/2)^2 + a^2 - 2a(c/2)\cos(\beta)$.

Como $(c/2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem s , temos $(c/2)^2 = 2s^2$, ou $c/2 = s\sqrt{2}$. Assim, $b^2 = (s\sqrt{2})^2 + a^2 - 2as\sqrt{2}\cos(\beta)$.

Usando a relação $s = a \cdot \cos(\beta)$, obtemos $b^2 = 2a^2 \cos^2(\beta) + a^2 - 2a^2 \sqrt{2} \cos^2(\beta)$, de modo que $b^2/a^2 = (2 - 2\sqrt{2})\cos^2(\beta) + 1$. Logo, $a/b = 1/\sqrt{(2 - 2\sqrt{2})\cos^2(\beta) + 1}$.

Para calcular $\cos^2(22,5^\circ)$, usamos a fórmula $\cos(45^\circ) = \cos^2(22,5^\circ) - \sin^2(22,5^\circ)$, que fornece $\cos(45^\circ) = 2\cos^2(22,5^\circ) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22,5^\circ) = (\cos(45^\circ) + 1)/2 = (\sqrt{2} + 2)/4$. Logo, $a/b = 2/\sqrt{(2 - 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + 4} = 2/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Questão 10

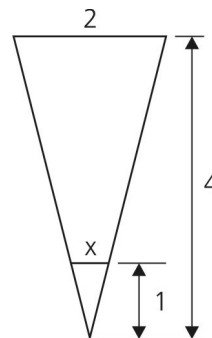
a)

Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura ao lado. Usando a semelhança de triângulos, constatamos que $2/4 = x/1$, ou seja, $x = 1/2$.

O volume da pirâmide maior é igual a $V_G = A_G \cdot h_G/3$, em que A_G é a área do quadrado de aresta 2 m e $h_G = 4$ m. Assim, $V_G = 2 \cdot 2 \cdot 4/3 = 16/3 \text{ m}^3$.

O volume da pirâmide menor é dado por $V_p = A_p \cdot h_p/3$, em que A_p é a área do quadrado de aresta $(1/2)$ m e $h_p = 1$ m. Assim, $V_p = (1/2) \cdot (1/2) \cdot 1/3 = 1/12 \text{ m}^3$.

O volume do tronco de pirâmide é $V_G - V_p = 16/3 - 1/12 = 63/12 = 21/4 \text{ m}^3$.



Resposta: A caixa d'água comporta $21/4 \text{ m}^3$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

a')

Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura acima. A pirâmide de altura 1, cuja base tem aresta x , é semelhante à pirâmide de altura 4, cuja base tem aresta 2. A razão entre os volumes dessas pirâmides é igual ao cubo da razão entre as alturas, ou seja, $V_p/V_G = 1/4^3 = 1/64$. Assim, o volume da pirâmide menor é $V_p = V_G/64$. O volume da caixa d'água é igual a $V_G - V_p = (1 - 1/64)A_G \cdot h_G/3 = (63/64) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4/3 = 21/4 \text{ m}^3$.

Resposta: A caixa d'água comporta $21/4 \text{ m}^3$.

a'')

Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura acima, a partir da qual, usando a semelhança de triângulos, constatamos que $2/4 = x/1$, ou seja, $x = 1/2$.

O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas é dado por $V = \left(\frac{h}{3}\right)(A_G + A_p + \sqrt{A_G A_p})$, onde h é a altura do tronco de pirâmide, e A_G e A_p são as áreas de suas bases.

Para o tronco em questão, temos $A_G = 2^2 = 4$, $A_p = (1/2)^2 = 1/4$ e $h = 3$. Logo, $V = \left(\frac{3}{3}\right)\left(4 + (1/4) + \sqrt{4 \cdot (1/4)}\right)$, ou $V = 21/4 \text{ m}^3$.

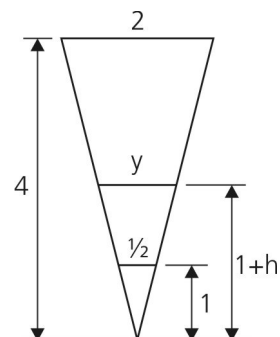
Resposta: A caixa d'água comporta $21/4 \text{ m}^3$.

b)

Seja h a altura do nível d'água e y o comprimento da aresta da seção quadrada do tronco de pirâmide que está a uma altura h da base inferior da caixa d'água (ver figura ao lado). Usando novamente a semelhança de triângulos, obtemos $y/(1+h) = 2/4$, ou $h = 2y - 1$.

O volume d'água até a altura h é dado por $V = A_b \cdot (h+1)/3 - 1/12 = y^2(2y-1+1)/3 - 1/12$. Assim, $V = 2y^3/3 - 1/12$. Se $V = 13/6$, então $(8y^3 - 1)/12 = 13/6$, ou $8y^3 = 27$.

Logo, $y = \sqrt[3]{27/8} = 3/2 \text{ m}$ e $h = 2y - 1 = 2 \text{ m}$.



Resposta: O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

b')

Seja h a altura do nível d'água e y o comprimento da aresta da seção quadrada do tronco de pirâmide que está a uma altura h da base inferior da caixa d'água (ver figura acima). Usando semelhança de triângulos novamente, obtemos $(1+h)/y = 4/2$, ou $y = (1+h)/2$.

O volume d'água até a altura h é dado por $V = A_b \cdot (h+1)/3 - 1/12 = (1+h)^3/12 - 1/12$. Se $V = 13/6$, então $[(1+h)^3 - 1]/12 = 13/6$, ou $(1+h)^3 = 27$. Logo, $(1+h) = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ m}$ e $h = 3 - 1 = 2 \text{ m}$.

Resposta: O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b'')

Seja h a altura do nível d'água (ver figura acima). O volume da pirâmide de altura $(h + 1)$ é igual a $V_N = V + V_p$, onde V é o volume do tronco de pirâmide e V_p é o volume da pirâmide de altura 1. Assim, $V_N = 13/6 + 1/12 = 9/4 \text{ m}^3$.

Usando a semelhança das pirâmides, concluímos que $V_N/V_p = (1 + h)^3/1^3$, donde $(1 + h)^3 = (9/4)/(1/12) = 27$. Obtemos, assim, $1 + h = \sqrt[3]{27} = 3$, de modo que $h = 2 \text{ m}$.

Resposta: O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

Questão 11

a)

Como o ponto P está sobre a circunferência, suas coordenadas satisfazem $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Ao mesmo tempo, por P estar sobre a semirreta, temos $y/x = \tan(30^\circ) = \sqrt{3}/3$, ou seja, $y = x\sqrt{3}/3$.

Voltando à primeira equação, obtemos $(x - 2)^2 + (x\sqrt{3}/3)^2 = 4$. Deste modo, $x(4x/3 - 4) = 0$. Logo, os pontos de interseção da semirreta com a circunferência centrada em $(2, 0)$ têm abscissas $x = 0$ e $x = 3$. Como P é o ponto de interseção com maior abscissa, concluímos que $x = 3$ e $y = x\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}$.

Resposta: Em P , $x = 3$ e $y = \sqrt{3}$.

a')

Como observamos na figura ao lado, o ângulo $\hat{SOP}$ está inscrito na circunferência de centro Q . Assim, sua medida é igual à metade da medida do ângulo central $\hat{SQP}$. Logo, o segmento de reta PQ faz um ângulo de 60° com o eixo x .

Além disso, esse segmento mede 2. Assim, temos $\sin(60^\circ) = y/2$ e $\cos(60^\circ) = z/2$. Desta forma, $y = 2\sin(60^\circ) = \sqrt{3}$, e $x = 2 + z = 2 + 2\cos(60^\circ) = 2 + 1 = 3$.

Resposta: Em P , $x = 3$ e $y = \sqrt{3}$.

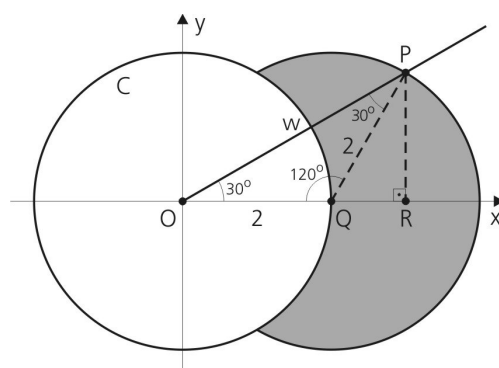
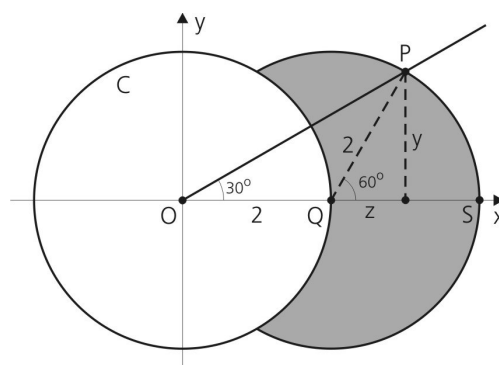
a'')

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OQP (ver figura ao lado), obtemos $w^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos(120^\circ) = 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos(60^\circ) = 8 + 8 \cdot (1/2) = 12$. Logo, $w = 2\sqrt{3}$. Usando, então, o triângulo POR , obtemos as coordenadas do ponto P :

$$y = w \cdot \sin(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot (1/2) = \sqrt{3}.$$

$$x = w \cdot \cos(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2) = 3.$$

Resposta: Em P , $x = 3$ e $y = \sqrt{3}$.



RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

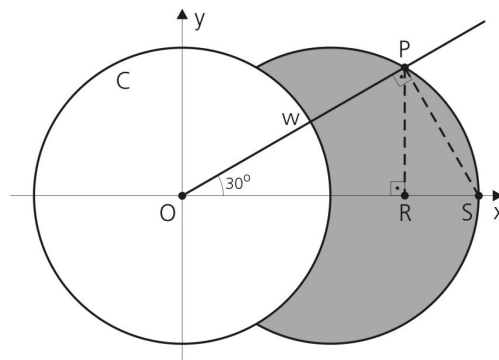
a''')

Como se observa na figura ao lado, o triângulo OPS é retângulo, pois a aresta OS é um diâmetro da circunferência centrada no ponto (2, 0). Além disso, por ser a hipotenusa do triângulo OPS, a aresta OS mede 4. Assim, $w = 4\cos(30^\circ) = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$.

Recorrendo, então, ao triângulo OPR, que também é retângulo, obtemos as coordenadas do ponto P:

$$y = w \cdot \sin(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot (1/2) = \sqrt{3}.$$

$$x = w \cdot \cos(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2) = 3.$$



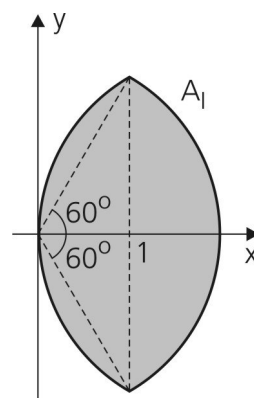
Resposta: Em P, $x = 3$ e $y = \sqrt{3}$.

b)

A área da região sombreada corresponde a $A_c - A_i$, em que A_c é a área do círculo de raio 2 e A_i é a área da interseção dos dois círculos. Os pontos de interseção das duas circunferências satisfazem $x^2 + y^2 = 4$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Assim, concluímos que $x = 1$ e $y = \pm\sqrt{3}$.

Como o segmento de reta que liga a origem ao ponto de interseção no primeiro quadrante tem comprimento 2, podemos concluir que o cosseno do ângulo entre este segmento e o eixo x vale 1/2, de modo que o ângulo é igual a 60° .

A figura ao lado indica que $A_i = 2(A_s - A_T)$, onde A_s é a área do setor circular com ângulo de 120° , e A_T é a área do triângulo de base $2\sqrt{3}$ e altura 1. Assim, $A_i = 2(\pi \cdot 2^2/3 - 1 \cdot 2\sqrt{3}/2) = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}$. Logo a área desejada é $A_c - A_i = \pi \cdot 2^2 - 8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.



Resposta: A região sombreada tem área igual a $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

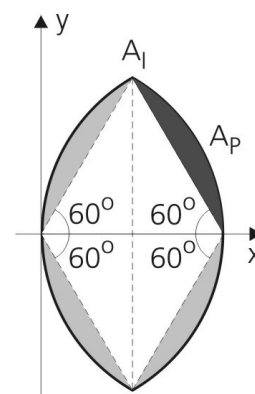
b')

Seja A_i a área da interseção dos dois círculos, como ilustrado na figura ao lado. Dividindo A_i ao meio, na horizontal, podemos inscrever na região resultante um triângulo equilátero de arestas iguais a 2. A área desse triângulo é $A_T = 2^2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}$.

Já a área da região A_p , indicada na figura, é a diferença entre a área de um setor circular e a área do triângulo equilátero, ou seja, $A_p = r^2\theta/2 - A_T$. Assim,

$$A_p = 2^2(\pi/3)/2 - \sqrt{3} = 2\pi/3 - \sqrt{3}.$$

Como $A_i = 2A_T + 4A_p$, temos $A_i = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}$. A área desejada corresponde a $A_c - A_i$, em que A_c é a área do círculo de raio 2. Deste modo, a área desejada é $\pi \cdot 2^2 - 8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.



Resposta: A região sombreada tem área igual a $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 12

a)

Se $n = 2$, então $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $f(x+h) = a_2(x+h)^2 + a_1(x+h) + a_0$. Assim,

$$f(x+h) = a_2x^2 + 2a_2xh + a_2h^2 + a_1x + a_1h + a_0 = f(x) + 2a_2xh + a_2h^2 + a_1h = f(x) + h(2a_2x + a_1 + a_2h).$$

Logo, $[f(x+h) - f(x)]/h = 2a_2x + a_1 + a_2h$. Por outro lado, $g(x) = 2a_2x + a_1$ e

$$g(x+h/2) = 2a_2(x+h/2) + a_1 = 2a_2x + a_2h + a_1 = [f(x+h) - f(x)]/h.$$

b)

Se $n = 3$ e $a_3 = 1$, então $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$. Como $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$, temos o sistema linear

$$\begin{array}{rclcl} f(1) & = & 1 + a_2 + a_1 + a_0 & = & 0 & a_0 + a_1 + a_2 & = & -1 \\ f(-1) & = & -1 + a_2 - a_1 + a_0 & = & 0 & \text{ou} & a_0 - a_1 + a_2 & = & 1. \\ g(1) & = & 3 + 2a_2 + a_1 & = & 0 & a_1 + 2a_2 & = & -3 \end{array}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos $2a_1 = -2$, de modo que $a_1 = -1$. Em seguida, da terceira equação, deduzimos que $-1 + 2a_2 = -3$, ou $a_2 = -1$. Finalmente, da primeira equação, obtemos $a_0 - 1 - 1 = -1$, de modo que $a_0 = 1$.

Resposta: O polinômio é $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

b')

Se $n = 3$ e $a_3 = 1$, então $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$. Como $f(1) = f(-1) = 0$, observamos que $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ são raízes do polinômio. Chamando de x_3 a terceira raiz, temos $f(x) = (x-1)(x+1)(x-x_3) = x^3 - x_3x^2 - x + x_3$. Assim, $a_2 = -x_3$, $a_1 = -1$ e $a_0 = x_3 = -a_2$. Como $g(1) = 0$, temos $3 + 2a_2 + a_1 = 0$, donde $a_2 = (-3 - a_1)/2 = -1$. Logo, $a_0 = 1$.

Resposta: O polinômio é $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

