

BERNOULLI COLÉGIO E PRÉ-VESTIBULAR



http://www.colegiobernoulli.com.br/bernoulli_resolve/

Matemática – Questão 01

Um professor de Matemática escreve no quadro os n primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$- 50, - 46, - 42, \dots, a_n .$$

Se esse professor apagar o décimo termo dessa sequência, a média aritmética dos termos restantes será 23.

CALCULE o termo a_n .

RESOLUÇÃO:

Seja P.A. $(-50, -46, -42, \dots, a_n)$

$$a_1 = -50 \text{ e } r = 4. \text{ Então } a_{10} = a_1 + 9r = -14$$

Excluindo o 10º termo, a média aritmética dos $n - 1$ restantes é 23. Assim

$$\frac{S_n - a_{10}}{n - 1} = 23 \quad (\text{I})$$

Calculando:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

$$S_n = [a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r] \cdot \frac{n}{2}$$

$$S_n = [-100 + (n - 1) \cdot 4] \cdot \frac{n}{2}$$

$$S_n = 2n^2 - 52n$$

Substituindo em I, temos

$$\frac{2n^2 - 52n - (-14)}{n - 1} = 23 \Leftrightarrow 2n^2 - 75n + 37 = 0$$

$$n = 37 \text{ ou } n = \frac{1}{2}$$

Como n é inteiro, $n = 37$

Daí

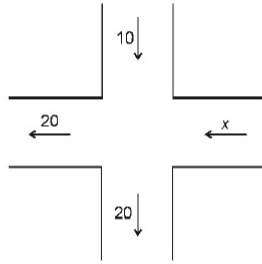
$$a_n = a_{37} = a_1 + 36 \cdot r$$

$$a_n = -50 + 36 \cdot 4$$

$a_n = 94$

Matemática – Questão 02

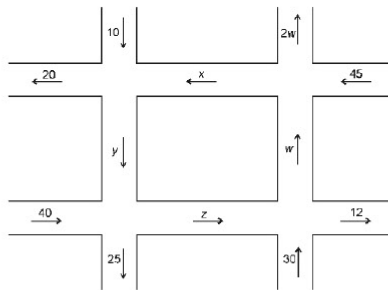
1. Suponha que, num cruzamento de ruas de mão única, as médias de veículos que, por minuto, entram e saem desse cruzamento são mostradas neste diagrama:



Seja x a média de veículos que entram, por minuto, no cruzamento, pela rua horizontal, no sentido leste-oeste.

CALCULE o valor de x .

2. Suponha, agora, que, numa região do centro de uma cidade, com ruas de mão única, as médias de veículos que, por minuto, entram ou saem dos cruzamentos são mostradas neste diagrama:



Sejam x , y , z e w as médias de veículos que, por minuto, entram ou saem de cada um dos quatro cruzamentos, mostrados nesse diagrama.

CALCULE os valores de x , y , z e w .

RESOLUÇÃO:

A) A quantidade de veículos que chegam é igual à quantidade que saem.

$$x + 10 = 20 + 20$$

$$x = 30 \text{ veículos}$$

B) Criando uma equação para cada cruzamento, temos:

$$\begin{cases} x + 10 = 20 + y & \text{(I)} \\ y + 40 = z + 25 & \text{(II)} \\ w + 45 = x + 2w & \text{(III)} \\ z + 30 = w + 12 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Fazendo (I) + (II)

$$x + 50 + y = z + y + 45$$

$$x = z - 5 \quad \text{(V)}$$

Igualando V e VI

$$z - 5 = -z + 27$$

$$\boxed{z = 16}$$

Em I

$$y = x - 10$$

$$y = 11 - 10$$

$$\boxed{y = 1}$$

Fazendo (III) - (IV)

$$w - z + 15 = x + w - 12$$

$$x = -z + 27 \quad \text{(VI)}$$

Em VI

$$x = -16 + 27$$

$$\boxed{x = 11}$$

Em IV

$$w = z + 18$$

$$\boxed{w = 34}$$

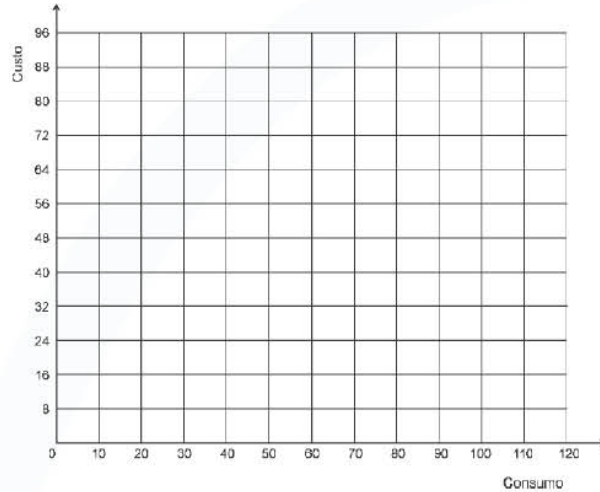
Os valores são $x = 11$, $y = 1$, $z = 16$ e $w = 34$.

Matemática – Questão 03

Uma concessionária de energia elétrica de certo estado brasileiro possui dois planos de cobrança para consumo residencial:

- o Plano I consiste em uma taxa mensal fixa de R\$24,00, que permite o consumo de até 60kWh, e, a partir desse valor, cada kWh extra consumido custa R\$0,90;
- o Plano II consiste em uma taxa mensal fixa de R\$ 40,00, que permite o consumo de até 80kWh, e, a partir desse valor, cada kWh extra consumido custa R\$1,10.

1. **ESBOCE**, no sistema de coordenadas a seguir, os gráficos das funções que representam o custo para o consumidor, em função do consumo de energia elétrica, no Plano I e no Plano II.



2. **DETERMINE** a faixa de consumo em que o Plano II é mais vantajoso para o consumidor.

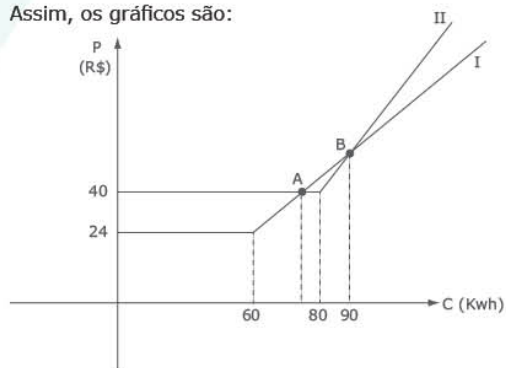
RESOLUÇÃO:

A) As funções preço (custo) são dadas por

$$P_I = \begin{cases} 24, & \text{se } x \leq 60 \\ 24 + 0,9(x - 60), & \text{se } x > 60 \end{cases}$$

$$P_{II} = \begin{cases} 40, & \text{se } x \leq 80 \\ 40 + 1,1(x - 80), & \text{se } x > 80 \end{cases}, \text{ em que } x \text{ é o consumo de Kwh}$$

Assim, os gráficos são:



B) O plano II é mais vantajoso que o plano I para $x_A < x < x_B$.

Ponto A:

$$P_I(x) = 40, x > 60$$

$$24 + 0,9(x - 60) = 40$$

$$x_A = \frac{700}{9} \text{ kWh}$$

Ponto B:

$$P_I(x) = P_{II}(x), x > 80$$

$$24 + 0,9(x - 60) = 40 + 1,1(x - 80)$$

$$x_B = 90 \text{ kWh}$$

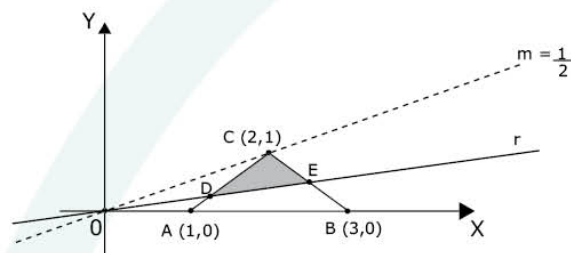
Logo o plano II é mais vantajoso se o consumo for maior que $\frac{700}{9}$ kWh e menor que 90 kWh.

Matemática – Questão 04

Seja ABC um triângulo cujos vértices, em coordenadas cartesianas, são $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (2, 1)$

CALCULE a inclinação m da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e divide esse triângulo em duas regiões de áreas iguais.

RESOLUÇÃO:



A área do $\triangle ABC$ é

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Como a reta r divide o $\triangle ABC$ em duas regiões de mesma área, a área do $\triangle CDE$ vale $\frac{1}{2}$.

Seja o sistema:

$$\begin{cases} y = mx & \rightarrow \text{reta } r \\ y = x - 1 & \rightarrow \text{reta suporte do lado } \overline{AC} \end{cases}$$

$$mx = x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{1 - m} \rightarrow y = \frac{m}{1 - m} \quad (\text{coordenadas do ponto D})$$

Seja o sistema:

$$\begin{cases} y = mx & \rightarrow \text{reta } r \\ y = -x + 3 & \rightarrow \text{reta suporte do lado } \overline{BC} \end{cases}$$

$$-x + 3 = mx$$

$$x = \frac{3}{1 + m} \rightarrow y = \frac{3m}{1 + m} \quad (\text{coordenadas do ponto E})$$

A área do $\triangle CDE$, pelo determinante, fica

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{1-m} & \frac{m}{1-m} & 1 \\ \frac{3}{1+m} & \frac{3m}{1+m} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{3m}{1-m^2} + \frac{2m}{1-m} + \frac{3}{1+m} - \frac{6m}{1+m} - \frac{1}{1-m} - \frac{3m}{1-m^2} \right| = 1$$

$$\left| \frac{2m(1+m) + 3(1-m) - 6m(1-m) - (1+m)}{(1-m)(1+m)} \right| = 1$$

$$\frac{8m^2 - 8m + 2}{1 - m^2} = 1$$

$$8m^2 - 8m + 2 = 1 - m^2 \quad \text{ou} \quad 8m^2 - 8m + 2 = -1 + m^2$$

$$9m^2 - 8m + 1 = 0$$

$$7m^2 - 8m + 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 36 = 28$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 7 \cdot 3 < 0$$

(não convém)

$$m = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{18}$$

$$m = \frac{4 - \sqrt{7}}{9}, \text{ pois } 0 < m < \frac{1}{2}$$

Matemática – Questão 05

Considere o sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = a^2 \\ y = |x| \end{cases}$$

em que a é um número real positivo.

DETERMINE o número de soluções distintas desse sistema em função de a .

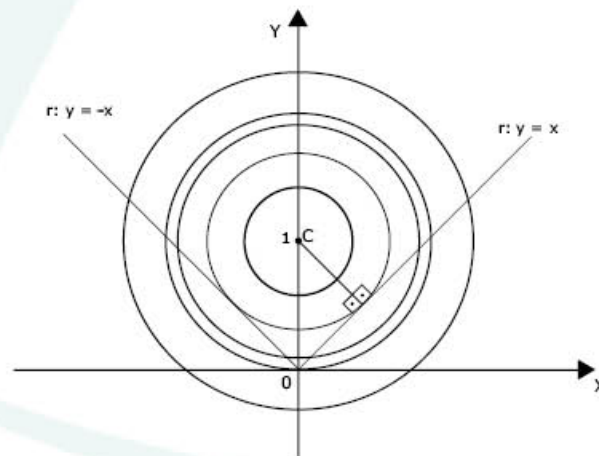
RESOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 &= a^2, & a > 0 & \quad \text{I} \\ y &= |x| & \quad \text{II} \end{aligned}$$

A equação I representa uma circunferência de centro $C(0,1)$ e raio $= a$.

A equação II corresponde a $y = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Graficamente, temos



A distância do centro $(0,1)$ à reta $r: y = x$, $(x - y = 0)$ é

$$d_{C,r} = \frac{|0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Temos, então, 5 casos mostrados na figura:

Se $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, não tem solução.

Se $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, são 2 soluções.

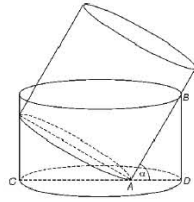
Se $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, são 4 soluções.

Se $a = 1$, são 3 soluções.

Se $a > 1$, são 2 soluções.

Matemática – Questão 06

Nesta figura, estão representados um tanque cilíndrico e um cilindro sólido metálico, ambos circulares retos:



O cilindro sólido encontra-se apoiado sobre o fundo e a lateral do tanque, que está, inicialmente, vazio.

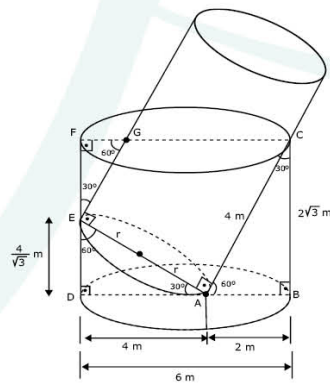
Sabe-se que

- a altura e o raio do tanque medem, respectivamente, $2\sqrt{3}$ m e 3 m;
- o ponto A pertence ao diâmetro CD da base do tanque; e
- o ângulo $\alpha = \widehat{BAD}$ mede 60° .

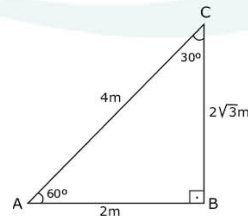
1. **CALCULE** o raio do cilindro sólido metálico.

2. **CALCULE** o volume de água necessário para, na situação descrita, se encher completamente o tanque.

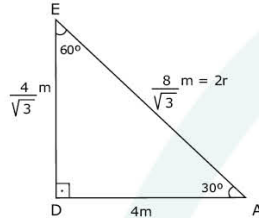
Resolução:



1) No triângulo ABC:

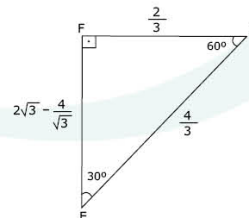
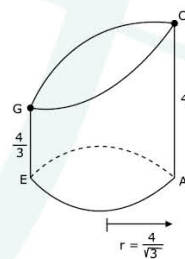


No triângulo ADE:



$$\text{Logo } r = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

2) O volume de água que cabe no tanque é a diferença entre o volume do tanque e o volume do tronco de cilindro AEGC. Calculemos inicialmente o volume do tronco.



$$V_{\text{tronco}} = \pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{4 + \frac{4}{3}}{2}$$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{128}{9} \pi \text{ m}^3$$

Assim,

$$V_{\text{água}} = V_{\text{tanque}} - V_{\text{tronco cilindro}}$$

$$V_{\text{água}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} - \frac{128\pi}{9}$$

$$V_{\text{água}} = 18\pi\sqrt{3} - \frac{128\pi}{9} \text{ m}^3$$

Matemática – Questão 07

Lilian possui sete pares de meias brancas, quatro pares de meias cinza, três pares de meias pretas e cinco pares de meias azuis.

Sabe-se que as meias de mesma cor são idênticas.

Suponha que todas essas meias estão embaralhadas em uma gaveta e que Lilian retira dela, aleatoriamente, certo número de meias.

Considerando essas informações, **DETERMINE**

1. o número mínimo de pés de meia que Lilian deve retirar dessa gaveta para ter certeza de ter, pelo menos, um par de meias de uma mesma cor.
2. a probabilidade de Lilian, ao retirar exatamente dois pés de meia dessa gaveta, obter um par de meias de uma mesma cor.
3. a probabilidade de Lilian, ao retirar quatro pés de meia dessa gaveta, obter, pelo menos, um par de meias de uma mesma cor.

RESOLUÇÃO:

1. Como são 4 cores diferentes, na pior situação, ao Lilian retirar 4 meias, ela ainda não consegue duas de mesma cor. Na 5ª retirada, com certeza ela obterá um par da mesma cor. Portanto, para garantir que ela terá, no mínimo um par de meias da mesma cor, ela deve retirar 5 meias.

2. Para conseguir um par da mesma cor, ela poderá tirar duas brancas ou duas cinzas ou duas pretas ou duas azuis.

Então,

$$P = \underbrace{\frac{14}{38} \cdot \frac{13}{37}}_{2 \text{ brancas}} + \underbrace{\frac{8}{38} \cdot \frac{7}{37}}_{2 \text{ cinzas}} + \underbrace{\frac{6}{38} \cdot \frac{5}{37}}_{2 \text{ pretas}} + \underbrace{\frac{10}{38} \cdot \frac{9}{37}}_{2 \text{ azuis}} = \boxed{\frac{179}{703}}$$

3) A probabilidade de Lilian retirar pelo menos um par de meias da mesma cor em 4 retiradas é 100% menos a probabilidade dela retirar todas meias de cores diferentes.

$$\begin{array}{c} \text{em qualquer} \\ \text{ordem} \end{array} \quad P = 1 - \overbrace{4!}^{1^{\text{a}} \text{ branca}} \cdot \frac{14}{38} \cdot \overbrace{\frac{8}{37}}^{2^{\text{a}} \text{ cinza}} \cdot \overbrace{\frac{6}{36}}^{3^{\text{a}} \text{ preta}} \cdot \overbrace{\frac{10}{35}}^{4^{\text{a}} \text{ azul}}$$

$$P = \frac{639}{703}$$

Matemática – Questão 08

1. **ESCREVA** na forma trigonométrica os números complexos

$$(\sqrt{3} + i) \text{ e } 2\sqrt{2}(1+i),$$

em que $i^2 = -1$.

2. **CALCULE** os menores inteiros positivos m e n tais que

$$(\sqrt{3} + i)^m = [2\sqrt{2}(1+i)]^n.$$

RESOLUÇÃO:

1)

$$z = \sqrt{3} + i = 2 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

$$z = 2\sqrt{2} (1 + i) = 4 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

2)

$$(\sqrt{3} + i)^m = [2\sqrt{2} (1 + i)]^n$$

$$\Leftrightarrow [2 (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^m = [4 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^n$$

$$\Leftrightarrow 2^m (\cos \frac{m\pi}{6} + i \sin \frac{m\pi}{6}) = 4^n (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow 2^m = 4^n \text{ e } \frac{m\pi}{6} = \frac{n\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow m = 2n \text{ e } \frac{m}{6} = \frac{n}{4} + 2k$$

$$\Leftrightarrow m = 2n \text{ e } 2m = 3n + 24k$$

$$\Leftrightarrow m = 2n \text{ e } 4n = 3n + 24k$$

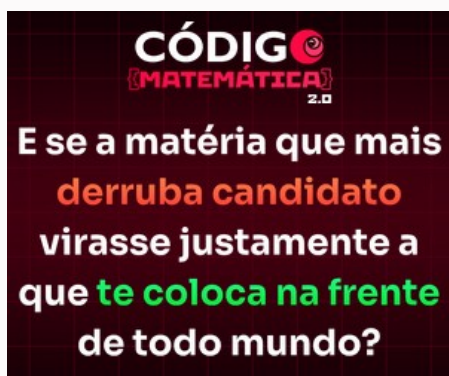
$$\Leftrightarrow m = 2n \text{ e } n = 24k, \text{ usando } k = 1, \text{ pois } m \text{ e } n \text{ são os menores inteiros.}$$

$$n = 24 \text{ e } m = 48$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

