

## NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$  : conjunto dos números complexos.

$\mathbb{Q}$  : conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R}$  : conjunto dos números reais.

$\mathbb{Z}$  : conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

$i$  : unidade imaginária;  $i^2 = -1$ .

$z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$\bar{z}$  : conjugado do número  $z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

$|z|$  : módulo do número  $z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ .

$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ .

$\emptyset$  : conjunto vazio.

$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$ .

$n(U)$  : número de elementos do conjunto  $U$ .

$\mathcal{P}(A)$  : coleção de todos os subconjuntos de  $A$ .

$f \circ g$  : função composta de  $f$  com  $g$ .

$I$  : matriz identidade  $n \times n$ .

$A^{-1}$  : inversa da matriz inversível  $A$ .

$A^T$  : transposta da matriz  $A$ .

$\det A$  : determinante da matriz  $A$ .

$\overline{AB}$  : segmento de reta unindo os pontos  $A$  e  $B$ .

$\widehat{AB}$  : arco de circunferência de extremidades  $A$  e  $B$ .

$m(\widehat{AB})$  : medida (comprimento) de  $\widehat{AB}$ .

**Questão 1.** Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ :

I.  $\emptyset \in U$  e  $n(U) = 10$ .

II.  $\emptyset \subset U$  e  $n(U) = 10$ .

III.  $5 \in U$  e  $\{5\} \subset U$ .

IV.  $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$ .

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e III.

B ( ) apenas II e IV.

C ( ) apenas II e III.

D ( ) apenas IV.

E ( ) todas as afirmações.

**Questão 2.** Seja o conjunto  $S = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$ , sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I.  $\frac{5}{4} \in S$  e  $\frac{7}{5} \in S$ .

II.  $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$ .

III.  $\sqrt{2} \in S$ .

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I e II

B ( ) I e III

C ( ) II e III

D ( ) I

E ( ) II

**Questão 3.** Seja  $\alpha$  um número real, com  $0 < \alpha < 1$ . Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de  $x$  tais que  $\alpha^{2x} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^{2x^2} < 1$ .

- A ( )  $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$       B ( )  $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$       C ( )  $]0, 2[$   
D ( )  $]-\infty, 0[$       E ( )  $]2, +\infty[$

**Questão 4.** Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = 2 \cos x + 2i \sin x$ . Então,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , o valor do produto  $f(x)f(y)$  é igual a

- A ( )  $f(x+y)$       B ( )  $2f(x+y)$       C ( )  $4if(x+y)$   
D ( )  $f(xy)$       E ( )  $2f(x) + 2if(y)$

**Questão 5.** Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

- A ( ) 210      B ( ) 315      C ( ) 410      D ( ) 415      E ( ) 521

**Questão 6.** Seja  $x \in \mathbb{R}$  e a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2 + 1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$ . Assinale a opção correta.

- A ( )  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $A$  possui inversa.  
B ( ) Apenas para  $x > 0$ ,  $A$  possui inversa.  
C ( ) São apenas dois os valores de  $x$  para os quais  $A$  possui inversa.  
D ( ) Não existe valor de  $x$  para o qual  $A$  possui inversa.  
E ( ) Para  $x = \log_2 5$ ,  $A$  não possui inversa.

**Questão 7.** Considerando as funções

$$\arcsen: [-1, +1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{e} \quad \arccos: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi],$$

assinale o valor de  $\cos \left( \arcsen \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5} \right)$ .

- A ( )  $\frac{6}{25}$       B ( )  $\frac{7}{25}$       C ( )  $\frac{1}{3}$       D ( )  $\frac{2}{5}$       E ( )  $\frac{5}{12}$

**Questão 8.** Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a  $5^\circ$ . Então, seu maior ângulo mede, em graus,

- A ( ) 120      B ( ) 130      C ( ) 140      D ( ) 150      E ( ) 160

**Questão 9.** O termo independente de  $x$  no desenvolvimento do binômio  $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$  é

- A ( )  $729\sqrt[3]{45}$       B ( )  $972\sqrt[3]{15}$       C ( )  $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$       D ( )  $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$       E ( )  $165\sqrt[3]{75}$

**Questão 10.** Considere as afirmações dadas a seguir, em que  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ ,  $n \geq 2$ :

- I. O determinante de  $A$  é nulo se e somente se  $A$  possui uma linha ou uma coluna nula.  
 II. Se  $A = (a_{ij})$  é tal que  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ , com  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , então  $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ .  
 III. Se  $B$  for obtida de  $A$ , multiplicando-se a primeira coluna por  $\sqrt{2} + 1$  e a segunda por  $\sqrt{2} - 1$ , mantendo-se inalteradas as demais colunas, então  $\det B = \det A$ .

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

- A ( ) apenas II.      B ( ) apenas III.      C ( ) apenas I e II.  
 D ( ) apenas II e III.      E ( ) todas.

**Questão 11.** Considere um cilindro circular reto, de volume igual a  $360\pi \text{ cm}^3$ , e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de  $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ , então, a área lateral da pirâmide mede, em  $\text{cm}^2$ ,

- A ( )  $18\sqrt{427}$       B ( )  $27\sqrt{427}$       C ( )  $36\sqrt{427}$       D ( )  $108\sqrt{3}$       E ( )  $45\sqrt{427}$

**Questão 12.** O conjunto de todos os valores de  $\alpha$ ,  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , tais que as soluções da equação (em  $x$ )

$$x^4 - \sqrt[4]{48} x^2 + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

são todas reais, é

- A ( )  $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$       B ( )  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$       C ( )  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$       D ( )  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$       E ( )  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

**Questão 13.** Sejam as funções  $f$  e  $g$  definidas em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = x^2 + \alpha x$  e  $g(x) = -(x^2 + \beta x)$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais. Considere que estas funções são tais que

| $f$          |                 | $g$           |                 |
|--------------|-----------------|---------------|-----------------|
| Valor mínimo | Ponto de mínimo | Valor máximo  | Ponto de máximo |
| -1           | < 0             | $\frac{9}{4}$ | > 0             |

Então, a soma de todos os valores de  $x$  para os quais  $(f \circ g)(x) = 0$  é igual a

- A ( ) 0      B ( ) 2      C ( ) 4      D ( ) 6      E ( ) 8

**Questão 14.** Considere todos os números  $z = x + iy$  que têm módulo  $\sqrt{7}/2$  e estão na elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ . Então, o produto deles é igual a

- A ( )  $\frac{25}{9}$       B ( )  $\frac{49}{16}$       C ( )  $\frac{81}{25}$       D ( )  $\frac{25}{7}$       E ( ) 4

**Questão 15.** Para algum número real  $r$ , o polinômio  $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$  é divisível por  $(x - r)^2$ . Qual dos números abaixo está mais próximo de  $r$ ?

- A ( ) 1,62      B ( ) 1,52      C ( ) 1,42      D ( ) 1,32      E ( ) 1,22

**Questão 16.** Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos  $(x, y)$  do plano que satisfazem a equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288.$$

- A ( ) Uma elipse.      B ( ) Uma parábola.      C ( ) Uma circunferência.  
D ( ) Uma hipérbole.      E ( ) Uma reta.

**Questão 17.** A soma das raízes da equação  $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , é igual a

- A ( ) -2      B ( ) -1      C ( ) 0      D ( ) 1      E ( ) 2

**Questão 18.** Dada a equação  $x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0$ , em que  $m$  é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

- I. Se  $m \in ]-6, 6[$ , então existe apenas uma raiz real.  
II. Se  $m = -6$  ou  $m = +6$ , então existe raiz com multiplicidade 2.  
III.  $\forall m \in \mathbb{R}$ , todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

- A ( ) I      B ( ) II      C ( ) III      D ( ) II e III      E ( ) I e II

**Questão 19.** Duas circunferências concêntricas  $C_1$  e  $C_2$  têm raios de 6 cm e  $6\sqrt{2}$  cm, respectivamente. Seja  $\overline{AB}$  uma corda de  $C_2$ , tangente à  $C_1$ . A área da menor região delimitada pela corda  $\overline{AB}$  e pelo arco  $\widehat{AB}$  mede, em  $\text{cm}^2$ ,

- A ( )  $9(\pi - 3)$       B ( )  $18(\pi + 3)$       C ( )  $18(\pi - 2)$       D ( )  $18(\pi + 2)$       E ( )  $16(\pi + 3)$

**Questão 20.** A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede  $R$  cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em  $\text{cm}^3$ , é igual a

- A ( )  $\pi R^3$       B ( )  $\pi\sqrt{2} R^3$       C ( )  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3$       D ( )  $\pi\sqrt{3} R^3$       E ( )  $\frac{\pi}{\sqrt{3}} R^3$

**As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.**

**Questão 21.** Seja  $A$  um conjunto não-vazio.

- a. Se  $n(A) = m$ , calcule  $n(\mathcal{P}(A))$  em termos de  $m$ .
- b. Denotando  $\mathcal{P}^1(A) = \mathcal{P}(A)$  e  $\mathcal{P}^{k+1}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(A))$ , para todo número natural  $k \geq 1$ , determine o menor  $k$ , tal que  $n(\mathcal{P}^k(A)) \geq 65000$ , sabendo que  $n(A) = 2$ .

**Questão 22.** Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

**Questão 23.** Determine os valores reais do parâmetro  $a$  para os quais existe um número real  $x$  satisfazendo  $\sqrt{1-x^2} \geq a-x$ .

**Questão 24.** Sendo  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , calcule  $\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| = \left| z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60} \right|$ .

**Questão 25.** Para  $b > 1$  e  $x > 0$ , resolva a equação em  $x$ :  $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$ .

**Questão 26.** Considere a equação  $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$ , em que  $d$  é uma constante real. Para qual valor de  $d$  a equação admite uma raiz dupla no intervalo  $]0,1[$ ?

**Questão 27.** Prove que, se os ângulos internos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  de um triângulo satisfazem a equação

$$\operatorname{sen}(3\alpha) + \operatorname{sen}(3\beta) + \operatorname{sen}(3\gamma) = 0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$  é igual a  $60^\circ$ .

**Questão 28.** Se  $A$  é uma matriz real, considere as definições:

- I. Uma matriz quadrada  $A$  é ortogonal se e só se  $A$  for inversível e  $A^{-1} = A^T$ .
- II. Uma matriz quadrada  $A$  é diagonal se e só se  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , com  $i \neq j$ .

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

**Questão 29.** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas que se interceptam segundo um ângulo de  $60^\circ$ . Seja  $C_1$  uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro  $O$  se situa em  $s$ , a 5 cm de  $r$ . Determine o raio da menor circunferência tangente à  $C_1$  e à reta  $r$ , cujo centro também se situa na reta  $s$ .

**Questão 30.** Sejam os pontos  $A:(2, 0)$ ,  $B:(4, 0)$  e  $P:(3, 5+2\sqrt{2})$ .

- a. Determine a equação da circunferência  $C$ , cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e é tangente ao eixo  $y$ .
- b. Determine as equações das retas tangentes à circunferência  $C$  que passam pelo ponto  $P$ .

## Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



### Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



### Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



### Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

