

Questão 1 – Seja $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3dx + e$ um polinômio com coeficientes reais em que $b = -1$ e uma das raízes é $x = -1$. Sabe-se que $a < b < c < d < e$ formam uma progressão aritmética crescente.

a) Determine a razão dessa progressão aritmética e os coeficientes do polinômio $P(x)$.

Sabe-se que $a < b < c < d < e$ formam uma progressão aritmética crescente (PA crescente). Seja r a razão dessa PA. Escrevendo essa PA em função de b e r , temos

$$a = b - r < b < c = b + r < d = b + 2r < e = b + 3r.$$

Usando o fato que $x = -1$ é raiz do polinômio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3dx + e$, obtemos:

$$0 = P(-1) = a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + 3d(-1) + e \Rightarrow a - b + c - 3d + e = 0.$$

Segue que

$$(b - r) - b + (b + r) - 3(b + 2r) + (b + 3r) = 0 \Rightarrow -b - 3r = 0 \Rightarrow r = -\frac{b}{3}.$$

Como $b = -1$, temos $r = \frac{1}{3}$.

Determinemos agora os coeficientes $a, b, c, 3d, e$, do polinômio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3dx + e$:

$$a = b - r = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}, \quad b = -1, \quad c = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}, \quad 3d = 3(-1 + \frac{2}{3}) = -1, \quad e = -1 + \frac{3}{3} = 0.$$

Portanto, $P(x) = -\frac{4}{3}x^4 - 1x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 1x$.

b) Encontre as demais raízes do polinômio $P(x)$.

Note que o polinômio $P(x)$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$P(x) = -\frac{1}{3}x(4x^3 + 3x^2 + 2x + 3).$$

Note que $x = 0$ é raiz de $P(x)$. Como $x = -1$ é raiz do polinômio $P(x)$, temos que também é raiz do polinômio $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 3$. Assim dividindo o polinômio $Q(x)$ por $x + 1$ obtemos:

Divisão de polinômio

ou

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 3x^2 + 2x + 3 & x + 1 \\ \hline -4x^3 - 4x^2 & 4x^2 - x + 3 \\ \hline -x^2 + 2x + 3 & \\ \hline +x^2 + x & \\ \hline 3x + 3 & \\ \hline -3x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ \hline & 4 & -1 & 3 & 0 \\ \hline & & 4x^2 - x + 3 & & \end{array} \quad \text{Resto da divisão}$$

Logo, $P(x) = -\frac{1}{3}x \cdot Q(x) = -\frac{1}{3}x(4x^2 - x + 3)(x + 1)$. As raízes de $4x^2 - x + 3$ são:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 48}}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{47}}{8}i.$$

Portanto, as raízes do polinômio $P(x)$ são: $-1, 0, \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{47}}{8}i$ e $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{47}}{8}i$.

Questão 2 – No plano cartesiano, considere os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$.

- a) Encontre a equação da reta r que passa por A e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 135° , medido do eixo para a reta no sentido anti-horário.

A equação da reta r que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem inclinação de θ é dada por, $y - y_A = m_r(x - x_A)$, onde $m_r = \operatorname{tg}(\theta)$ é o coeficiente angular da reta r .

Como $A(-1, 2)$ e $\theta = 135^\circ$, temos $m_r = \operatorname{tg}(135^\circ) = -1$ e

$$y - (2) = -1(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 1.$$

Equação da reta r : $y_r = -x + 1$.

- b) Seja s a reta que passa por B e é perpendicular à reta r . Encontre as coordenadas do ponto P , determinado pela intersecção das retas r e s .

Sejam m_r e m_s os coeficientes angulares das retas r e s , respectivamente. Como as retas r e s são perpendiculares, temos $m_r \cdot m_s = -1$. Pelo item a, sabemos que $m_r = -1$, logo

$$m_s = \frac{-1}{m_r} \Rightarrow m_s = \frac{-1}{-1} \Rightarrow m_s = 1.$$

Como a reta s passa pelo ponto $B(3, 4)$, sua equação é dada por

$$y - (4) = 1(x - (3)) \Rightarrow y - 4 = x - 3 \Rightarrow y = x + 1.$$

Então, a equação da reta s é dada por: $y_s = x + 1$.

Determinemos agora o ponto P dado pela intersecção das retas r e s $\begin{cases} y_r = -x + 1 \\ y_s = x + 1 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, obtemos $x + 1 = -x + 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Logo $P(0, 1)$.

- c) Determine a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2, 1)$ e tangencia as retas r e s .

Seja D o ponto de tangência da circunferência com a reta r . Logo o comprimento do segmento $\overline{QD}$ é o raio R da circunferência, isto é, $R = QD$. Como D é o ponto de tangência da circunferência com a reta r , temos que o ângulo $\widehat{PDQ}$ é retângulo em D , ou seja, $\widehat{PDQ} = 90^\circ$. A reta que passa por P e Q é paralela ao eixo dos x , logo $\widehat{DPQ} = \widehat{PQD} = 45^\circ$ e o triângulo retângulo DPQ é isósceles de lado QD e hipotenusa $PQ = 2$. Assim,

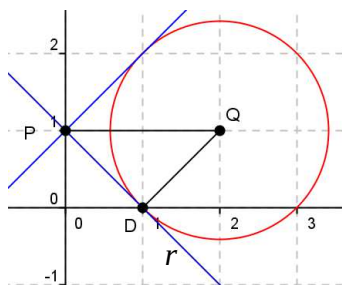
$$R^2 + R^2 = 2^2 \Rightarrow 2R^2 = 4 \Rightarrow R = \sqrt{2}.$$

A equação de uma circunferência que possui centro no ponto (x_o, y_o) e raio R é dada por

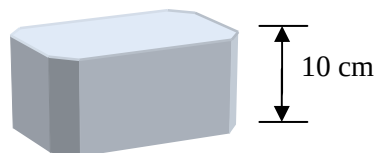
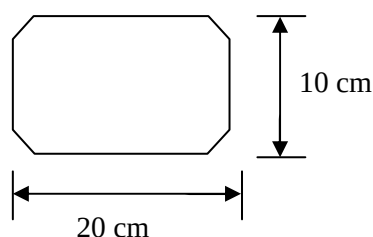
$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2.$$

Portanto, a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2, 1)$ é:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$



Questão 3 – Uma empresa de sorvete utiliza como embalagem um prisma reto, cuja altura mede 10 cm e cuja base é dada conforme descrição a seguir: de um retângulo de dimensões 20 cm por 10 cm, extrai-se em cada um dos quatro vértices um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1 cm.



a) Calcule o volume da embalagem.

Seja V o volume da embalagem, isto é, $V = A \times h$, onde :

h = altura da embalagem,

A = área da base desta embalagem.

Temos que, cada um dos quatro triângulos extraídos tem área igual a $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Logo

$$A = (20 \times 10 - 4 \times \frac{1}{2}) = 198 \text{ cm}^2.$$

Assim, o volume desta embalagem é dado por

$$V = 198 \times 10 = 1980 \text{ cm}^3.$$

b) Sabendo que o volume ocupado por esse sorvete aumenta em $\frac{1}{5}$ (um quinto) quando passa do estado líquido para o estado sólido, qual deve ser o volume máximo ocupado por esse sorvete no estado líquido, nessa embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde?

Sejam

V = volume da embalagem, isto é $V = A \times h$.

V_0 = o volume que deve ser colocado na embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde.

Então

$$V_0 + \frac{1}{5}V_0 = V \Rightarrow \frac{6}{5}V_0 = V \Rightarrow V_0 = \frac{5}{6}V.$$

Portanto,

$$V_0 = \frac{5}{6} \times 1980 = 1650 \text{ cm}^3.$$

Questão 4 – Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = x - 14$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 8$, respectivamente.

a) Determine o conjunto dos valores de x tais que $f(x) > g(x)$.

Defina

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 5x - 6.$$

Neste caso, $f(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

Note que a representação gráfica da função h é uma parábola com concavidade voltada para cima, cujas raízes são dadas por:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 6.$$

Logo $h(x) > 0$ para todos os valores de x fora do intervalo compreendido entre as raízes x_1 e x_2 . Assim o conjunto procurado é,

$$X = \{x \in \mathbb{R}; h(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > g(x)\} = \mathbb{R} - [-1, 6] =]-\infty, -1[\cup]6, +\infty[.$$

b) Determine o menor número real κ tal que $f(x) + \kappa \geq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Defina

$$h_k(x) = f(x) + k - g(x) = x^2 - 5x - 6 + k.$$

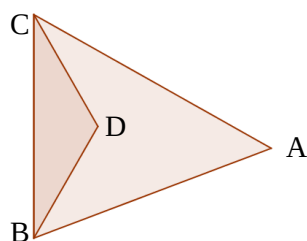
Neste caso, $f(x) + k \geq g(x) \Leftrightarrow h_k(x) \geq 0$.

Note que a representação gráfica da função h_k é uma parábola com concavidade voltada para cima, logo $h_k(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, quando $\Delta \leq 0$, ou seja, quando

$$\Delta = 25 + 24 - 4k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{49}{4}.$$

Como queremos o menor k , seu valor é $k = \frac{49}{4}$.

Questão 5 – Considere dois triângulos ABC e DBC , de mesma base $\overline{BC}$, tais que D é um ponto interno ao triângulo ABC . A medida de $\overline{BC}$ é igual a 10 cm. Com relação aos ângulos internos desses triângulos, sabe-se que: $\widehat{DBC} = \widehat{BCD}$, $\widehat{DCA} = 30^\circ$, $\widehat{DBA} = 40^\circ$, $\widehat{BAC} = 50^\circ$.

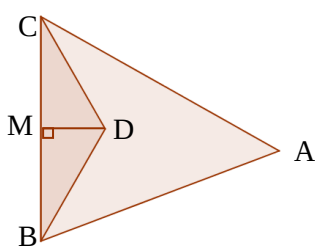


a) Encontre a medida do ângulo $\widehat{BDC}$.

Seja $\alpha = \widehat{DBC} = \widehat{BCD}$. Logo $\widehat{CBA} = \alpha + 40^\circ$ e $\widehat{BCA} = \alpha + 30^\circ$. Como a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é 180° , temos $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 180^\circ$, ou seja, $(\alpha + 40^\circ) + (\alpha + 30^\circ) + 50^\circ = 180^\circ$. Logo, $2\alpha = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ e assim, $\alpha = 30^\circ$.

Do triângulo DBC , obtemos a seguinte relação entre seus ângulos internos: $\widehat{BDC} + \widehat{DCB} + \widehat{CBD} = 180^\circ$. Logo, $\widehat{BDC} + 2\alpha = 180^\circ$, e assim $\widehat{BDC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

b) Calcule a medida do segmento $\overline{BD}$.



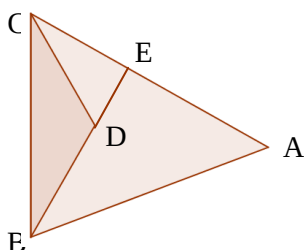
Seja M um ponto no segmento $\overline{BC}$ tal que $\overline{DM}$ é a altura do triângulo DBC de base $\overline{BC}$. Como $\widehat{DBC} = \widehat{BCD}$, segue que o triângulo DBC é isósceles de base $\overline{BC}$, e assim M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Do triângulo BMD , retângulo em M , temos

$$\cos(\alpha) = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{BD} \Rightarrow BD \cdot \sqrt{3} = 10 \Rightarrow BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

c) Admitindo-se $\operatorname{tg}(50^\circ) = \frac{6}{5}$, determine a medida do segmento $\overline{AC}$.



Seja E o ponto de interseção do segmento $\overline{AC}$ com o prolongamento do segmento $\overline{BD}$. Do triângulo ABE , obtemos a seguinte relação: $\widehat{BEA} + \widehat{EAB} + \widehat{ABE} = 180^\circ$. Logo $\widehat{BEA} = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$. Da mesma forma, temos que $\widehat{BEC} = 90^\circ$. Como $CD = BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, do triângulo CED , retângulo em E , obtemos:

$$DE = DC \cdot \operatorname{sen}(30^\circ) \Rightarrow DE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$CE = DC \cdot \cos(30^\circ) \Rightarrow CE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CE = 5.$$

$$\text{Logo } BE = BD + DE = \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}, \text{ ou seja, } BE = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}.$$

Usando que $\operatorname{tg}(50^\circ) = \frac{6}{5}$, obtemos:

$$\frac{6}{5} = \operatorname{tg}(50^\circ) = \frac{BE}{AE} \Rightarrow AE = \frac{5}{6}BE \Rightarrow AE = \frac{5}{6} \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow AE = \frac{25\sqrt{3}}{6}. \text{ Assim, } AC = AE + EC = 5 + \frac{25\sqrt{3}}{6}.$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

