

Nível 3

Ensino Médio

2ª FASE – 24 de outubro de 2009

Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.

Parabéns pelo seu desempenho na 1ª Fase da OBMEP. É com grande satisfação que contamos agora com sua participação na 2ª Fase. Desejamos que você faça uma boa prova e que ela seja um estímulo para aumentar seu gosto e sua alegria em estudar Matemática.

Um abraço da Equipe da OBMEP!



Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao fiscal imediatamente.
2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro abaixo. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
3. Lembre-se de assinar o quadro abaixo e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões.
8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
9. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta.
10. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador.
11. Não escreva nos espaços sombreados.

“Espera, espera, tive uma idéia e uma idéia não se deixa fugir.”

Euclides da Cunha

Homenagem da OBMEP ao grande escritor brasileiro Euclides da Cunha, por ocasião do centenário de sua morte.

Nome completo do aluno																			
Endereço completo do aluno (Rua, Av., nº)																			
Complemento										Bairro									
Cidade										UF		CEP							
Endereço eletrônico (email)										DDD		Telefone							
Assinatura										DDD		Telefone (outro)							

Preencha
e confira
os dados
acima com
muita atenção!

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional
	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional

(1) Em uma caixa foram colocados um cartão no qual está escrito o número 1, dois cartões nos quais está escrito o número 2, três cartões com o número 3 e assim por diante, até dez cartões com o número 10.

(a) Quantos cartões foram colocados na caixa?

Correção Regional	Correção Nacional

(b) Explique como escolher 19 cartões da caixa sem que três deles tenham o mesmo número.

Correção Regional	Correção Nacional

(c) Qual é o menor número de cartões que pode ser retirado da caixa, ao acaso, para que se tenha certeza que cinco deles têm o mesmo número? Justifique sua resposta.

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

(2) Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a , b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

(a) Verifique que $(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2$ é igual a $2x + 1$, qualquer que seja x .

Correção
Regional

Correção
Nacional

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x - m)^2 + (4x - n)^2 - (5x - 5)^2 = 2x$, qualquer que seja x .

Correção
Regional

Correção
Nacional

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

Correção
Regional

Correção
Nacional

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

(3) No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2 3		1 e 6
2 2		1, 2, 4 e 3

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

1	3	5	7
2	4	6	8

Correção Regional

Correção Nacional

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2 100.

Correção Regional

Correção Nacional

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção Regional

Correção Nacional

(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção Regional

Correção Nacional

TOTAL

Correção Regional

Correção Nacional

(4) Quatro times, entre os quais o Quixajuba, disputam um torneio de vôlei em que:

- cada time joga contra cada um dos outros uma única vez;
- qualquer partida termina com a vitória de um dos times;
- em qualquer partida os times têm a mesma probabilidade de ganhar;
- ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.



(a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?

Correção
Regional

Correção
Nacional

(b) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com o Quixajuba isolado em primeiro lugar?

Correção
Regional

Correção
Nacional

(c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

(5) Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

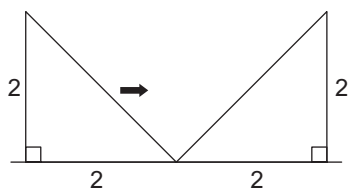


Figura 1

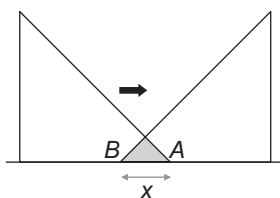


Figura 2

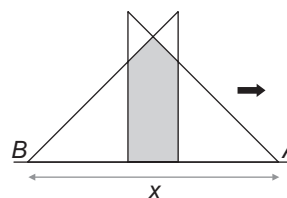


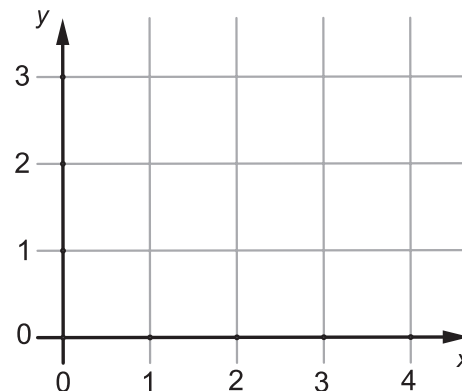
Figura 3

Para cada x no intervalo $[0,4]$, seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(b) Encontre as expressões de f nos intervalos $[0,2]$ e $[2,4]$ e esboce o seu gráfico.



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

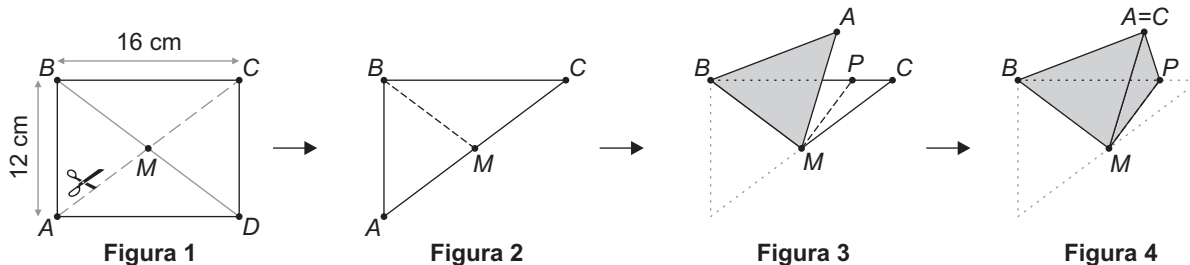
(c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(6) Uma folha de papel retangular $ABCD$ de 12 cm por 16 cm (figura 1) é cortada ao longo da diagonal AC (figura 2). O triângulo ABC é dobrado pelo segmento BM (figura 3), sendo M o ponto de encontro das diagonais do retângulo $ABCD$. Finalmente, é feita uma dobra ao longo de MP , onde P é escolhido de modo que CM coincida com AM (figura 4).



(a) Explique porque o ângulo $\widehat{BMP}$ na figura 4 é reto.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(b) Mostre que o triângulo BMP da figura 4 é semelhante ao triângulo ABC da figura 2.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(c) Calcule a área do triângulo BMP da figura 4.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(d) Calcule a área do quadrilátero $ABMP$ da figura 4.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

RASCUNHO

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

