

PROVA DE MATEMÁTICA

PISM I – Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

Questão 1: Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada:

- **função par** se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- **função ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Dada uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, determine condições sobre a , b e c para que f seja uma função par.

Solução:

Para que f seja uma função par é necessário que $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ou seja:

$$a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-bx = bx, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-2bx = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, para que f seja uma função par é necessário que $b = 0$.

b) Mostre que nenhuma função quadrática pode ser uma função ímpar.

Solução:

Se f fosse uma função ímpar teríamos $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$a(-x)^2 + b(-x) + c = -(ax^2 + bx + c), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2ax^2 + 2c = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ax^2 + c = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Como a igualdade $(*)$ deve ser satisfeita para todo x real, em particular, ela deve ser satisfeita para $x = 0$.

Nesse caso tem-se:

$$a(0)^2 + c = 0 \Rightarrow c = 0,$$

e, substituindo $c = 0$ em $(*)$ obtém-se:

$$ax^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $a = 0$, o que contraria a condição $a \neq 0$ que é necessária para que f seja uma função quadrática.
Observação:

Após a obtenção da igualdade $(*)$, foi atribuído a x um valor particular, no caso $x = 0$. Entretanto, qualquer outro valor que se atribuísse a x , levaria à mesma conclusão. De fato, fazendo por exemplo $x = 1$ em $(*)$, obtém-se:

$$a(1)^2 + c = 0 \Rightarrow a = -c$$

Substituindo $a = -c$ em $(*)$ obtém-se:

$$-cx^2 + c = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c(1 - x^2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

donde se conclui que $c = 0$ e, portanto, $a = 0$.

c) Encontre uma função que seja, simultaneamente, uma função par e uma função ímpar.

Solução:

Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja par e ímpar.

Então f deve ser tal que:

$$f(-x) = f(x) \text{ e } f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim

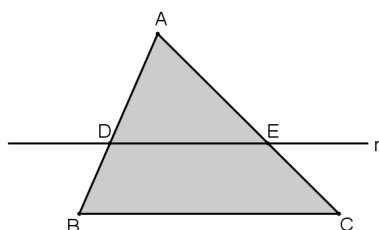
$$f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a única função que é, simultaneamente, uma função par e uma função ímpar é a função identicamente nula.

Questão 2: Traça-se uma reta r , paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC , obtendo o segmento $\overline{DE}$. O segmento $\overline{DE}$ divide o triângulo ABC em dois polígonos de mesma área. A altura do triângulo ABC , relativa ao lado $\overline{BC}$, mede 4 cm.

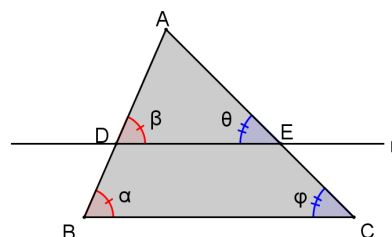


a) Justifique a semelhança entre os triângulos ABC e ADE .

Solução:

Como a reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC e os ângulos α e β são correspondentes, assim como θ e φ , ilustrados na figura ao lado, segue que $\alpha = \beta$ e $\theta = \varphi$.

Como os triângulos ADE e ABC possuem dois pares de ângulos congruentes, conclui-se que são semelhantes.



b) Determine a razão de semelhança entre os triângulos ABC e ADE.

Solução:

Como o segmento $\overline{DE}$ divide o triângulo ABC em dois polígonos de mesma área tem-se:

$$S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BCED} = 2 \times S_{ADE}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 2$$

Como a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança k , segue que $k = \sqrt{2}$.

c) Determine a altura do trapézio BCED.

Solução:

Designando por h a altura do trapézio BCED, tem-se que a altura do triângulo ADE será dada por $4 - h$.

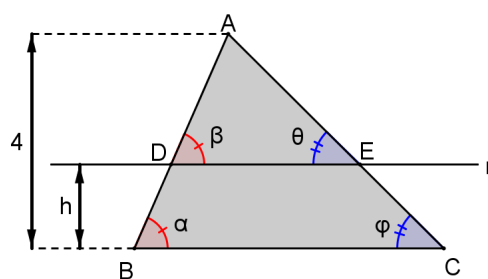
Como a razão de semelhança k entre os triângulos ABC e ADE é dada por $k = \sqrt{2}$, tem-se que

$$\frac{4}{4 - h} = \sqrt{2}$$

$$4 - h = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$4 - h = 2\sqrt{2}$$

$$h = 4 - 2\sqrt{2} \text{ cm}$$



Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

