

Padrão de respostas às questões discursivas

A seguir encontram-se as questões das provas discursivas da 2ª ETAPA do Vestibular UFF 2011, acompanhadas das respostas esperadas pelas bancas.

MATEMÁTICA - GRUPOS I e J

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

a) Determine os 3 (três) primeiros dígitos da representação decimal do número $\frac{14}{13}$; ou seja, escrevendo $\frac{14}{13} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, com $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine os valores de a_0 , a_1 e a_2 . **(0,5 ponto)**

b) Sendo $a = 2^{3000}$ e $b = 3^{2000}$, verifique se a é igual, maior ou menor do que b . Justifique sua resposta. **(0,5 ponto)**

c) Considerando que, na reta real esboçada abaixo, o intervalo $\left[-\frac{2}{3}, \frac{3}{10}\right]$ está dividido em 7 (sete) partes iguais, determine o número que corresponde ao ponto x indicado na figura e escreva sua resposta em forma de fração irredutível. **(1,0 ponto)**



Cálculos e respostas:

a) Dividindo-se 14 por 13,

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 - 13 \\
 \hline
 10 \\
 - 0 \\
 \hline
 100 \\
 - 91 \\
 \hline
 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 13 \\
 1,07
 \end{array}$$

obtem-se a representação decimal $\frac{14}{13} = 1,07\dots$. Portanto os 3 (três) primeiros dígitos de tal representação são: 1, 0 e 7.

(b) $a = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$; $b = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$. Como 8^{1000} é menor do que 9^{1000} , a é menor do que b .

(c) O comprimento do intervalo é $\frac{3}{10} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{29}{30}$. Como ele foi dividido em 7 partes iguais, os comprimentos de cada um dos novos intervalos é $\frac{29}{30} : 7 = \frac{29}{210}$. Portanto, o ponto x corresponde ao número real

$$-\frac{2}{3} + \frac{29}{210} + \frac{29}{210} = -\frac{41}{105}$$

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Determine os valores dos números reais A , B e C , tais que

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{2, -1\}$.

Cálculos e respostas:

Tem-se:

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A - B + C)x + (A - 2B - 2C)}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow A+B=2, \quad 2A - B + C=3 \quad \text{e} \quad A - 2B - 2C = -5.$$

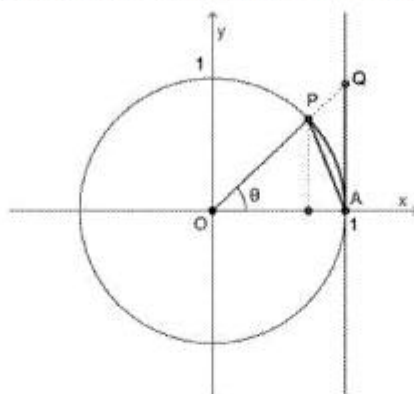
Logo, $A = 1$, $B = 1$ e $C = 2$.

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Fixado um sistema de coordenadas retangulares no plano, sejam $A = (1,0)$ e $O = (0,0)$. Considere P um ponto sobre o círculo de centro em $O = (0,0)$ e raio 1. Sabe-se que a medida, em radianos, do ângulo $\theta = \widehat{AOP}$, indicado na figura, pertence ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Sejam Q o ponto de interseção da reta $x = 1$ com a semirreta OP , u a área do triângulo AOP , v a área do setor circular AOP (correspondente ao ângulo $\widehat{AOP}$) e w a área do triângulo AOQ .



- a) Determine u , v e w em função do ângulo $\theta = \widehat{AOP}$. (1,2 ponto)
 b) Observe na figura que $u < v < w$. Considerando esse fato, demonstre as desigualdades:

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1. \text{ (0,8 ponto)}$$

Cálculos e respostas:

a) $u = \frac{1}{2} \cdot \sin \theta$, $v = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \theta$ e $w = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \theta$, com $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

b) Dos resultados obtidos no item (a) conclui-se: $\frac{\sin \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\operatorname{tg} \theta}{2}$. Portanto, $1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$ e, assim,

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1.$$

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Seja f a função definida por $f(x) = \frac{5}{3e^x - 7}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \ln \frac{7}{3}$.

Determine:

- a) o menor inteiro maior do que $f(\ln 3)$; **(0,4 ponto)**
- b) o valor de x que satisfaz a equação $f(x) = -1$; **(0,4 ponto)**
- c) os valores de x que satisfazem a inequação $f(x) > 0$. **(1,2 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) $f(\ln 3) = \frac{5}{3e^{\ln 3} - 7} = \frac{5}{9 - 7} = \frac{5}{2} = 2,5$. Portanto, o menor inteiro pedido é 3.

b) $f(x) = -1 \Leftrightarrow 3e^x - 7 = -5 \Leftrightarrow 3e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln \frac{2}{3}$.

c) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^x - 7 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{7}{3} \Leftrightarrow x > \ln \frac{7}{3}$.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Considere os subconjuntos A , B e C do $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2y \leq 3\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y+1)^2 \leq 16\}.$$

Determine:

- a) os respectivos centros e raios das circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 2y = 3$; $x^2 + (y+1)^2 = 16$; **(0,8 ponto)**
- b) a área da região $S = C - (A \cup B)$. **(1,2 ponto)**

Cálculos e respostas:

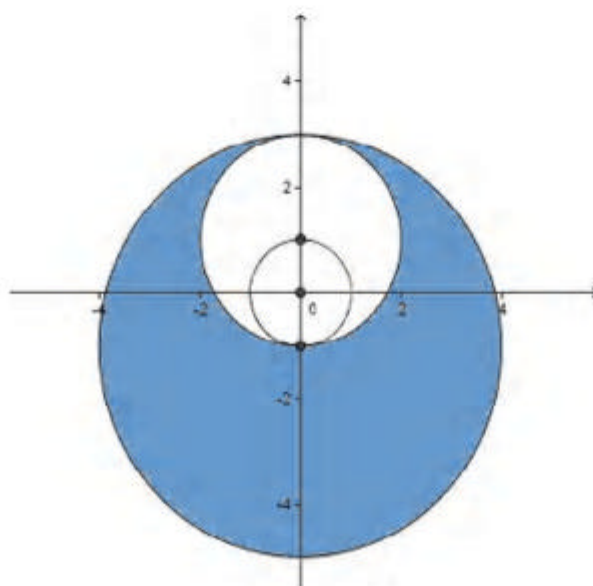
- a) O centro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é o ponto $(0,0)$ e o seu raio é 1.
Como,

$$x^2 + y^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4 = 2^2,$$

tem-se que o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2y = 3$ é o ponto $(0,1)$ e o seu raio é 2.

O centro da circunferência $x^2 + (y+1)^2 = 16 = 4^2$ é o ponto $(0, -1)$ e o seu raio é 4.

- b) Como $A \cup B = B$, então área de $S = (\text{área de } C - \text{área de } B) = 16\pi - 4\pi = 12\pi$.



Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

