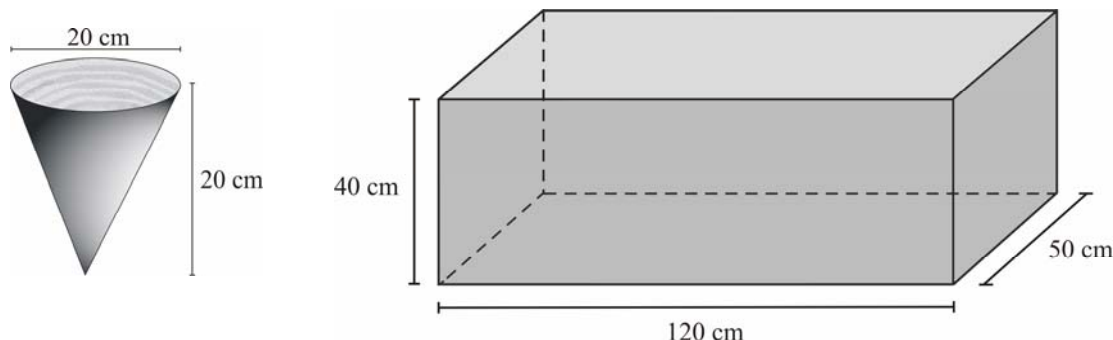


- 1) Fernando utiliza um recipiente, em forma de um cone circular reto, para encher com água um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo. As dimensões do cone são: 20 cm de diâmetro de base e 20 cm de altura e as do aquário são: 120 cm, 50 cm e 40 cm, conforme ilustração abaixo.



Cada vez que Fernando enche o recipiente na torneira do jardim, ele derrama 10% de seu conteúdo no caminho e despeja o restante no aquário. Estando o aquário inicialmente vazio, qual é o número mínimo de vezes que Fernando deverá encher o recipiente na torneira para que a água despejada no aquário atinja $\frac{1}{5}$ de sua capacidade?

$$V_{aq} = \text{volume do aquário} \Rightarrow V_{aq} = 40 \cdot 50 \cdot 120 = 240.000$$

$$V_a = \frac{1}{5} \text{ do volume do aquário} \Rightarrow V_a = \frac{1}{5} 240.000 = 48.000$$

$$V_c = \text{volume do cone} \Rightarrow V_c = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 20}{3} = \frac{2000\pi}{3}$$

$$V_t = \text{volume de água transportada no cone}$$

$$\Rightarrow V_t = \frac{9}{10} V_c = \frac{9}{10} \frac{2000\pi}{3} = 600\pi$$

$$N = \text{número de viagens} \Rightarrow N = \frac{48.000}{600\pi} = \frac{80}{\pi} \cong 25,47 \text{ (se } \pi \cong 3,14)$$

Conclusão: desta forma serão necessárias 26 viagens.

Justificativa da conclusão: é necessário mostrar que a aproximação para π não influencia o resultado final, isto é, que as aproximações inferior e superior para π mantêm o número de viagens superior a 25, mas abaixo de 26. Assim, de $3,1 < \pi < 3,15$, segue-se que o número de viagens, calculados pra os valores 3,1 e 3,15 são, respectivamente,

$$\frac{80}{3,1} = 25,8 \text{ e } \frac{80}{3,15} = 25,4.$$

Portanto, o número de viagens usando a aproximação “superior” para π fica acima de 25 e o número de viagens usando a aproximação “inferior” fica abaixo de 26.

(valor: 5,0 pontos)

2) Flávio tem, em sua calculadora, uma tecla com o símbolo . Se o visor da calculadora mostra um número x , ao apertar a tecla , aparece, no visor, o valor de $\frac{-8x}{(x-1)(x-7)}$, se este existir; caso contrário, aparece a mensagem ERRO.

a) Se Flávio inserir o número 2 no visor e apertar a tecla , qual número aparecerá no visor?

Fazendo $x = 2$ na expressão dada, obtemos:

$$\frac{(-8) \cdot 2}{(2-1)(2-7)} = \frac{-16}{-5} = \frac{16}{5} = 3,2$$

(valor: 0,5 pontos)

b) Para quais valores que, uma vez inseridos no visor, ao se apertar a tecla , surgirá a mensagem ERRO?

Os valores que geram a mensagem “erro” são aqueles para os quais $(x-1)(x-7) = 0$. Assim, temos que $x = 1$ ou $x = 7$.

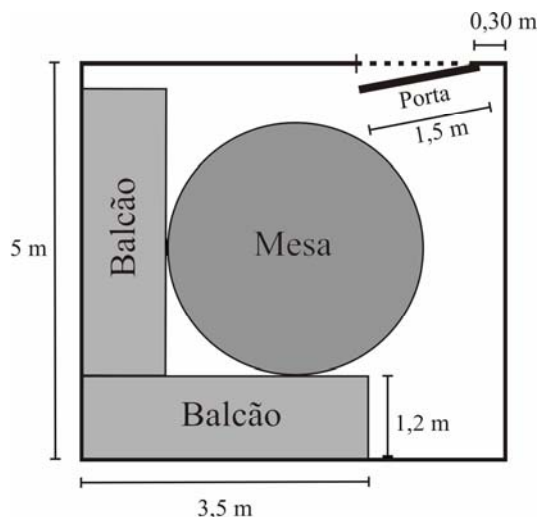
(valor: 1,0 ponto)

c) Flávio inseriu um número x no visor e, ao apertar a tecla , apareceu o próprio número inserido. Nessas condições, determine todos os possíveis valores que Flávio poderia ter inserido no visor.

$$\begin{aligned} \frac{-8x}{(x-1)(x-7)} &= x \\ x^3 - 8x^2 + 7x &= -8x \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 15x = 0 \\ x(x^2 - 8x + 15) &= 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 8x + 15 = 0 \\ x = 0, x = 3 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

(valor: 3,5 pontos)

- 3) Num cômodo quadrado de lado 5 m, há uma porta de 1,5 m de largura, posicionada a 0,30 m de um dos cantos. Nesse cômodo, foram colocados dois balcões retangulares idênticos, de 3,5 m de comprimento e 1,2 m de largura, encostados nas paredes, e uma mesa circular de 3 m de diâmetro, encostada nesses balcões, conforme indica a planta-baixa, a seguir:



- a) Qual é a medida, em m^2 , da área da planta-baixa não ocupada pelos móveis?

Sejam S_C , S_B , S_M as áreas do cômodo, do balcão, da mesa, respectivamente, e seja S a área procurada. Então,

$$S_C = 5 \cdot 5 = 25$$

$$S_B = 3,5 \cdot 1,2 = 4,2$$

$$S_M = \pi(1,5)^2 = 2,25\pi$$

Portanto,

$$S = S_C - 2S_B - S_M \Rightarrow S = 25 - 8,4 - 2,25\pi = 16,6 - 2,25\pi$$

(valor: 3,0 pontos)

- b) É possível abrir totalmente a porta desse cômodo com os móveis nas posições indicadas?

Sejam AC o segmento de reta vertical ligando o centro da mesa à parede superior do cômodo e AB o segmento de reta ligando o centro da mesa ao ponto onde a porta está presa na parede. Então,

$$AC = 5 - 1,5 - 1,2 = 2,3$$

$$CB = 5 - 1,5 - 1,2 - 0,3 = 2$$

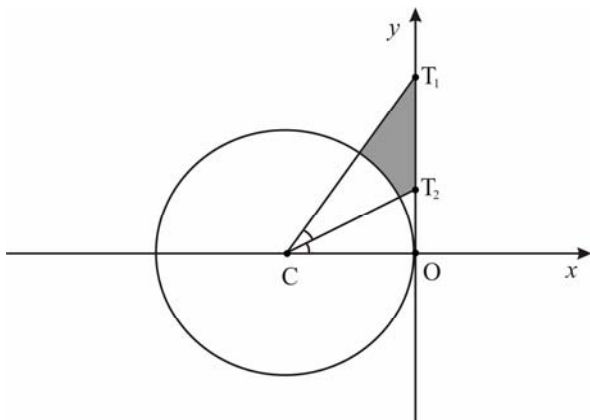
$$(AB)^2 = (2,3)^2 + 2^2 = 5,29 + 4 = 9,29 \Rightarrow AB = \sqrt{9,29}$$

$$AB > 3 = 1,5 + 1,5 = r + p,$$

onde r é o raio da mesa e p é largura da porta. Portanto, é possível abrir a porta.

(valor: 2,0 pontos)

- 4) Na figura abaixo, temos um sistema de eixos cartesianos com origem em O. Nele, encontra-se representada uma circunferência tangente ao eixo das ordenadas e com centro $C(-1,0)$. Sejam T_1 e T_2 pontos sobre o semi-eixo positivo das ordenadas, tais que $\widehat{T_2CT_1} = \widehat{OCT_2} = 30^\circ$.



- a) Determine o comprimento do segmento $\overline{OT_1}$.

$$\overline{OT_1} = \frac{\overline{OT_1}}{1} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

(valor: 1,0 ponto)

- b) Calcule o valor da área sombreada.

$$A(\Delta_{OCT_1}) = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left| \quad A(\Delta_{OCT_2}) = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \right| \quad A(S_C) = \frac{\pi \cdot 1^2}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$A_R = A(\Delta_{OCT_1}) - A(\Delta_{OCT_2}) - A(S_C) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{4\sqrt{3} - \pi}{12}$$

(valor: 2,0 pontos)

- c) Encontre as equações das retas que passam pelo ponto T_1 e são tangentes à circunferência dada.

Justificativa de que a reta tangente com o eixo x forma um ângulo de 30° .

$$y = y_0 + (\operatorname{tg} 30^\circ)(x - 0) \text{ e } x = 0$$

$$y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ e } x = 0$$

(valor: 2,0 pontos)

5) Uma circunferência de centro no ponto $C(5,4)$ é tangente à reta de equação $x = 5 + 2\sqrt{2}$.

a) Essa circunferência intercepta o eixo das abscissas?

$$r = |5 - (5 + 2\sqrt{2})| = 2\sqrt{2}$$

Comparando o raio com a ordenada do centro da circunferência: $2\sqrt{2} \cong 2,82 < 4$

(valor: 1,5 pontos)

b) Qual é a posição relativa do ponto $P(3,2)$ em relação a essa circunferência?

Equação da circunferência: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

Como $P(3,2)$ satisfaz a equação da circunferência, o mesmo está sobre a circunferência.

(valor: 1,0 ponto)

c) Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $P(3,2)$ e é tangente a essa circunferência.

$$m_r = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}, \text{ onde } (y_0, x_0) = (3, 2) \text{ e } (a, b) = (5, 4).$$

$$m_r = \frac{3-5}{2-4} = 1$$

$$m_s = \frac{-1}{m_r} = -1$$

$$y - 2 = -1(x - 3) \Rightarrow y = 5 - x$$

(valor: 2,5 pontos)

- 6) Numa escola, verificou-se que 130 alunos não lêem o jornal P, 146 não lêem o jornal M e 8 lêem os jornais P e M. Sabe-se que 60 alunos lêem, pelo menos, um dos dois jornais.

a) Qual é o número de alunos na escola?

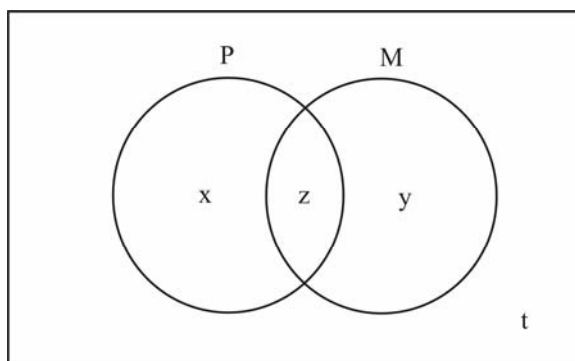
x = lêem P e não lêem M

y = não lêem P e lêem M

z = lêem P e lêem M

t = não lêem P e não lêem M

$x+y+z+t=?$



$$\begin{cases} t+y=130 \\ x+t=146 \\ x+z+y=60 \\ z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+y=130 \\ x+t=146 \\ x+y=52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=16 \\ x+y=52 \end{cases} \Rightarrow x=34, y=18, z=8 \text{ e } t=112$$

$$x+y+z+t=172$$

(valor: 2,5 pontos)

- b) Um estudante dessa escola foi selecionado, aleatoriamente, dentre os estudantes que lêem, pelo menos, um dos dois jornais. Qual é a probabilidade de ele ser leitor de ambos os jornais?

$$P(P \cap M) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

(valor: 1,0 ponto)

- c) Se um estudante dessa escola é selecionado ao acaso, qual é a probabilidade de esse aluno ser leitor do jornal P, sabendo-se que ele é leitor de, pelo menos, um dos dois jornais?

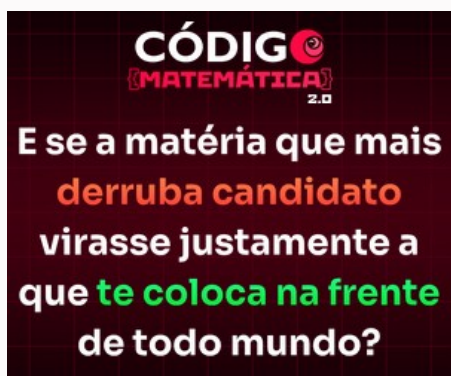
$$P(P | (P \cup M)) = \frac{P(P \cap (P \cup M))}{P(P \cup M)} = \frac{P(P)}{P(P \cup M)} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$$

(valor: 1,5 pontos)

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

