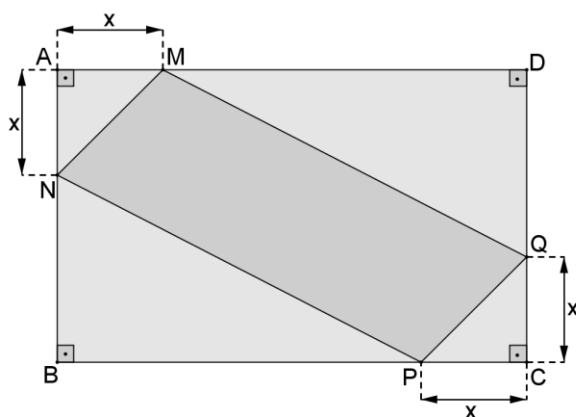


PISM 1 – QUESTÕES ABERTAS - GABARITO

1ª Questão

Sobre os lados do retângulo ABCD, de dimensões 30cm e 50cm, marcam-se os pontos M, N, P e Q de forma que a distância dos pontos M e N ao vértice A e dos pontos P e Q ao vértice C sejam iguais a x centímetros. Veja a figura abaixo:



Determine o valor de x de modo que o quadrilátero MNPQ tenha área máxima.

Solução:

Tem-se que: $S_{ABCD} = 30 \cdot 50 = 1500 \text{ cm}^2$, $S_{AMN} = S_{CPQ} = \frac{x^2}{2} \text{ cm}^2$ e

$$S_{MDQ} = S_{NBP} = \frac{(30-x)(50-x)}{2} = \frac{1500 - 80x + x^2}{2} \text{ cm}^2.$$

Note que $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - 2 \cdot (S_{AMN} + S_{MDQ})$. Daí resulta que:

$$S_{MNPQ} = 30 \cdot 50 - 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1500 - 80x + x^2}{2} \right) = 1500 - x^2 - 1500 + 80x - x^2 = -2x^2 + 80x.$$

Portanto, o valor de S_{MNPQ} depende de x e essa dependência é quadrática, ou seja, a relação

$S_{MNPQ} = -2x^2 + 80x$ define uma função quadrática que fornece o valor de S_{MNPQ} em função da variável x .

Como o coeficiente do termo quadrático é negativo (-2), segue que S_{MNPQ} assume um valor máximo. Esse valor máximo de S_{MNPQ} é alcançado quando x é igual à abscissa do vértice da parábola. Logo o valor máximo de S_{MNPQ} é alcançado quando

$$x = -\frac{80}{2(-2)} = -\frac{80}{-4} = 20 \text{ cm}.$$

2ª Questão

Seja $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a propriedade

$$(*) \quad f(xy) = f(x) + f(y),$$

para todos x e y reais positivos.

A) Mostre que $f(1) = 0$.

Solução:

Como $1 = 1 \cdot 1$, tem-se que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$. Subtraindo $f(1)$ de ambos os membros da igualdade obtém-se $f(1) = 0$.

B) Sejam a uma constante real positiva e $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a igualdade

$$g(x) = f(ax) - f(x),$$

para todo x real positivo. Mostre que g é uma função constante.

Solução:

Tem-se $g(x) = f(ax) - f(x)$ para todo x real positivo. Utilizando a propriedade $(*)$ segue que

$$g(x) = \underbrace{f(ax)}_{=f(a)+f(x)} - f(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$$

para todo x real positivo. Ou seja, $g(x)$ assume o valor $f(a)$ para todo x real positivo. Portanto g é uma função constante.

C) Dê exemplo de uma função que cumpra a propriedade $(*)$.

Solução:

Considere a função $h(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \ln(x)$. Para esta função tem-se:

$$h(x \cdot y) = \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) = h(x) + h(y) \text{ para todos } x \text{ e } y \text{ reais positivos.}$$

Logo a função h cumpre a propriedade $(*)$.

Observação: Note que qualquer função logarítmica serviria como exemplo, independentemente da base. Além de funções logarítmicas, a função identicamente nula também serviria como exemplo.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

