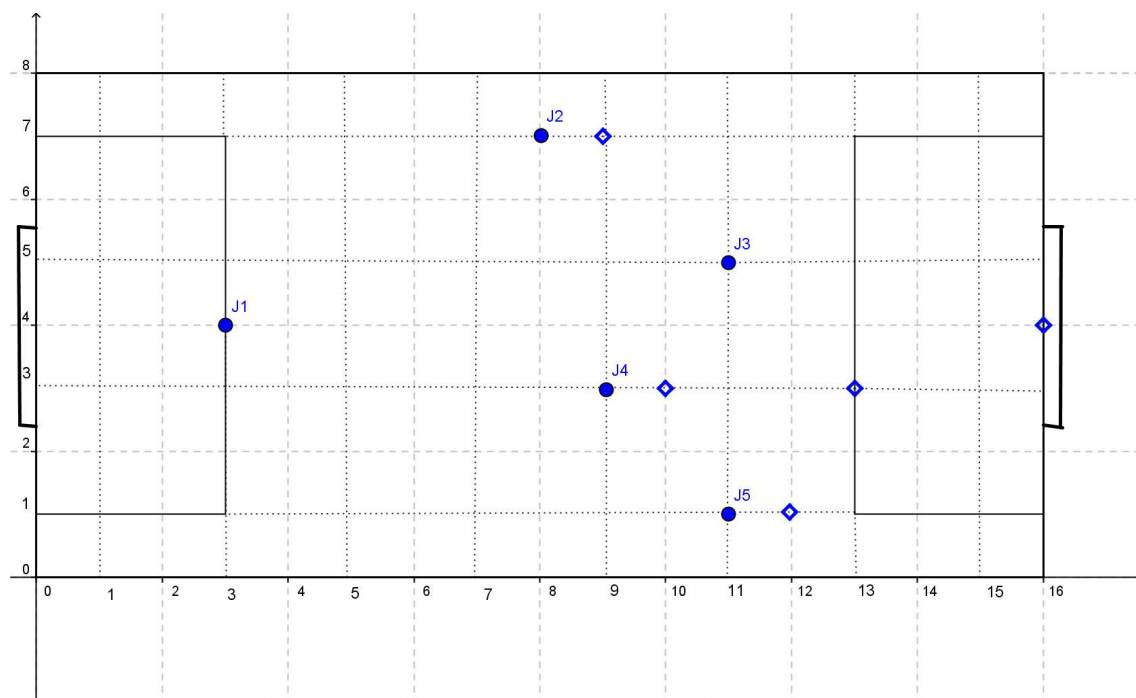


Questão 1 – O quadro, a seguir, representa uma quadra de futsal e dois times, o time de camisa branca e o time de camisa preta, representados por $\diamond$ e $\bullet$, respectivamente, distribuídos em um determinado instante do jogo.



O goleiro do time de camisa preta está na posição (3,4) do plano cartesiano e deseja passar a bola ao longo de uma reta para o jogador com melhor condição para chutar a bola ao gol adversário (jogador menos marcado e mais próximo ao gol).

- a)** Supondo que o jogador escolhido pelo goleiro do time de camisa preta faça o gol, calcule a menor distância percorrida pela bola partindo do goleiro ao gol adversário.

Temos que a menor distância é dada por $D = d(J_1, J_3) + d(J_3, G)$, onde $G(16,5)$ (ponto da linha do gol (reta $x=16$), cuja reta que passa por J_3 e G é perpendicular a essa linha).

$$\text{Logo } D = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_G)^2 + (y_3 - y_G)^2} = \sqrt{(3-11)^2 + (4-5)^2} + \sqrt{(11-16)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{65} + 5 \text{ u.c.}$$

- b)** Prove que a distância obtida no item **a** desta questão é realmente a menor.

Basta mostrar que a distância mínima de J_3 ao gol corresponde a distância de J_3 a um ponto G do gol cuja reta que passa por esses pontos é perpendicular a linha do gol (determinada pela reta $x=16$).

De fato, seja $d = d(J_3, G)$ e considere $h = d(J_3, \bar{G})$, onde $\bar{G} \neq G$ e, $\bar{G}$ pertence a linha do gol. Observe que os pontos J_3, G e $\bar{G}$ formam um triângulo retângulo em G . Logo pelo Teorema de Pitágoras

$$h^2 = d^2 + s^2,$$

onde $s = d(G, \bar{G})$. Logo $h^2 > d^2$ e portanto $h > d$.

- c) Escreva a equação da curva (ou lugar geométrico) determinada pelos pontos (x, y) cuja distância ao goleiro do time de camisa branca na posição $(16, 4)$ é igual à distância desse goleiro ao jogador J_3 .

Sejam $P(x, y)$ e G_B o goleiro do time de camisa branca, então $d(P, G_B) = d(G_B, J_3)$, ou seja,

$$\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} = \sqrt{(x_3 - x_B)^2 + (y_3 - y_B)^2} \Rightarrow \sqrt{(x - 16)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(11 - 16)^2 + (5 - 4)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 16)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow (x - 16)^2 + (y - 4)^2 = 26.$$

Portanto a equação da curva é $(x - 16)^2 + (y - 4)^2 = 26$, logo a curva é uma circunferência centrada em $C(16, 4)$ e raio $r = \sqrt{26}$.

- d) Obtenha o cosseno de θ , onde θ é o ângulo determinado pelas retas r_1 e r_2 , sendo que r_1 passa por J_1 e J_5 e r_2 que passa por J_3 e J_5 .

Considere o triângulo de vértices J_1, J_5 e A , retângulo em A , onde $A \in r_2$. Logo $A(11, 4)$. Dessa forma

$$\cos \theta = \frac{3}{d(J_1, J_5)} = \frac{3}{\sqrt{73}} = \frac{3\sqrt{73}}{73}.$$

Questão 2 – Decomponha o polinômio $p(x) = x^7 - x$ em $p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)p_4(x)p_5(x)$, de forma que $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ tenham grau 1 e $p_4(x), p_5(x)$ tenham grau 2 e não possuam raízes reais.

Temos que $p(x) = x^7 - x = x(x^6 - 1)$. Decompondo o último fator temos $p(x) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1)$.

Lembrando que $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ obtemos $p(x) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Sabemos que uma equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, é irreduzível em $\mathbb{R}$ (não possui raízes reais) se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Assim os polinômios $x^2 + x + 1$ e $x^2 - x + 1$ são irreduzíveis, pois $\Delta = -3 < 0$.

Desta forma,

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)p_4(x)p_5(x),$$

com $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x - 1$, $p_3(x) = x + 1$, $p_4(x) = x^2 + x + 1$ e $p_5(x) = x^2 - x + 1$.

Questão 3 – Considere uma circunferência de centro $C(a,b)$ de raio 1. Sabendo que essa circunferência é tangente às retas $2x + y - 3 = 0$ e $y = 0$, e que o centro C está situado no segundo quadrante, obtenha as coordenadas de C .

Sabendo que a distância do ponto $C(a,b)$ à reta $cx + dy + e = 0$ é dada por

$$d = \frac{|ac + bd + e|}{\sqrt{c^2 + d^2}},$$

E como o raio da circunferência é 1, segue que a distância de C a qualquer uma das retas tangentes dadas é $d = 1$.

Assim a distância de C à reta $y = 0$ é

$$d = |b| = 1,$$

Logo $b = \pm 1$.

Por outro lado, a distância de C à reta $2x + y - 3 = 0$ é

$$d = \frac{|2a + b - 3|}{\sqrt{5}} = 1.$$

Como o centro está no segundo quadrante, temos que $b = 1$, substituindo o valor de b na igualdade acima obtemos

$$2|a - 1| = \sqrt{5},$$

$$\text{então } a = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto como o centro está situado no segundo quadrante, $a = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $C = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1\right)$.

Questão 4 – Dado um grupo com 3 mulheres e 8 homens, obtenha o número de filas distintas com 5 pessoas, contendo em cada fila exatamente 2 mulheres.

Temos que o número possível de filas é dado por

$$P_5 \cdot C_2^3 \cdot C_3^8 = 5! \left(\frac{3!}{2!(3-2)!} \right) \left(\frac{8!}{3!(8-3)!} \right) = 120 \left(\frac{3!}{2!1!} \right) \left(\frac{8!}{3!5!} \right) = 120 \cdot 168 = 20160.$$

Questão 5 – Uma indústria farmacêutica fabrica três produtos, A, B e C, usando três tipos de substâncias X, Y e Z. Para a fabricação de cada litro de A, são utilizados 1 ml da substância X, 2 ml de Y e 4 ml de Z. Para cada litro de B, 1 ml da substância X, 3 ml de Y e 5 ml de Z e, para cada litro de C, 1 ml de X, 1 ml de Y e 7 ml de Z. Determine quantos litros de cada um dos produtos A, B e C foram fabricados com 5 litros de X, 11 litros de Y e 27 litros de Z.

Sejam x, y e z a quantidade em litros dos produtos A, B e C, respectivamente.

$$\text{Temos } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 27000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 5000 \\ 2x + 3y + z = 11000 \\ 4x + 5y + 7z = 27000 \end{cases}$$

Logo para determinar os valores de x, y e z devemos resolver o sistema de equações lineares acima.

Usaremos escalonamento.

Considere a matriz associada ao sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 2 & 3 & 1 & 11000 \\ 4 & 5 & 7 & 27000 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 7000 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & 0 & 4 & 6000 \end{pmatrix}$$

Assim obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 5000 \\ y - z = 1000 \\ 4z = 6000 \end{cases}.$$

Portanto $z = \frac{6000}{4} = 1500$ e como $y - z = 1000$, segue que $y = 2500$. Além disso, como $x + y + z = 5000$, obtemos $x = 1000$. Logo foram produzidos 1 litro do produto A, 2,5 litros de B e 1,5 litros de C.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

