

1. (alternativa D) Cinco voltas na praça correspondem a $5 \times 4 = 20$ lados do quadrado. Sueli caiu quando faltavam $\frac{2}{7}$ para completar esse percurso, ou seja, depois de percorrer $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ do trajeto total. Isto equivale a $\frac{5}{7} \times 20 = \frac{100}{7} = \frac{98}{7} + \frac{2}{7} = 14 + \frac{2}{7}$ lados do quadrado. Como $14 = 3 \times 4 + 2$, ela deu 3 voltas completas na praça e andou mais 2 lados, o que a levou ao ponto C. Depois disso ela ainda andou $\frac{2}{7}$ de um lado; como $\frac{2}{7}$ é menor que 1, ela não chegou ao próximo vértice do quadrado. Logo ela caiu no ponto D.

2. (alternativa E) Vamos usar o símbolo $\approx$ para indicar “aproximadamente igual a”; ou seja, $x \approx y$ quer dizer que x é aproximadamente igual a y . Por exemplo, $0,899 \approx 0,9$ e $0,101 \approx 0,1$. Em geral, se em uma operação aritmética trocamos os números envolvidos por outros aproximadamente iguais a eles, o resultado da operação deve ser uma aproximação do que teríamos obtido com os números originais. No nosso caso, temos

$$(0,899^2 - 0,101^2) \times 0,5 \approx (0,9^2 - 0,1^2) \times 0,5 = (0,81 - 0,01) \times 0,5 = 0,8 \times 0,5 = 0,4.$$

Outra maneira de resolver esta questão é usar a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ para escrever

$$\begin{aligned} (0,899^2 - 0,101^2) \times 0,5 &= (0,899 + 0,101)(0,899 - 0,101) \times 0,5 \\ &\approx (0,9 + 0,1) \times (0,9 - 0,1) \times 0,5 = 1 \times 0,8 \times 0,5 = 0,4 \end{aligned}$$

3. (alternativa C) Como $x = y = 2z$ temos $xyz = (2z)(2z)z = 4z^3$, donde $4z^3 = 864$.

Logo $z^3 = \frac{864}{4} = 216$, e segue que $z = \sqrt[3]{216} = 6$. Obtemos então

$$x + y + z = 2z + 2z + z = 5z = 5 \times 6 = 30.$$

4. (alternativa B) Como o hexágono é regular, suas diagonais são iguais. Logo o triângulo ACE da figura I é equilátero, e segue que $\widehat{CAE} = 60^\circ$. Além disso, como AD é um dos eixos de simetria do hexágono, o triângulo APQ é isósceles; como ele já tem um ângulo de 60° segue que ele é equilátero.

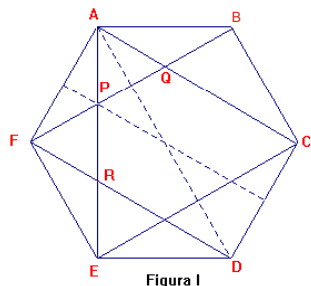


Figura I

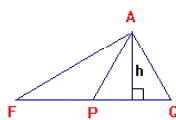


Figura II

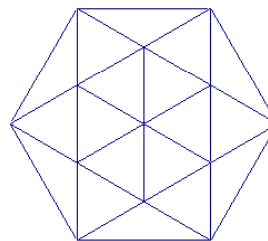


Figura III

O mesmo raciocínio mostra que o triângulo FRP também é equilátero. Como o hexágono tem outro eixo de simetria que passa por P , os triângulos APQ e FRP são congruentes; como ambos são equiláteros todos os seus lados são iguais, e em particular temos $PQ = FP$. Assim,

os triângulos AFP e APQ têm bases iguais e a mesma altura, que denotamos por h na figura II. Denotemos agora por a a área do triângulo APQ ; temos então

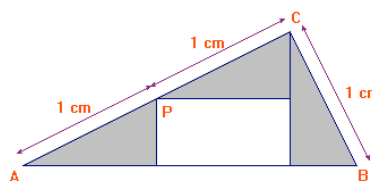
$$a = \text{área}(APQ) = \frac{1}{2} PQ \times h = \frac{1}{2} FP \times h = \text{área}(AFP).$$

Isso mostra que na figura III o hexágono está dividido em 18 triângulos de área a ; segue que $18a = 45$, donde $a = \frac{45}{18} = 2,5 \text{ cm}^2$.

5. (alternativa D) As instruções dizem que ovos e creme não podem estar juntos no bolo, bem como leite e laranja; isso elimina as opções (B), (C) e (E). Elas dizem também que um bolo sem creme não pode ter leite, o que elimina a opção (A)

6. (alternativa D) A primeira etapa da viagem do José só pode ter sido $C \rightarrow E$ ou $E \rightarrow C$, pois $4 + 9 = 13$ é o único modo de percorrer 13 km entre cidades nessa estrada. Como todas as cidades distam de C menos que 21 km, o percurso inicial foi $C \rightarrow E$. Percorrendo 21 km a partir de E levou José à cidade A e mais 12 km o levam à cidade D, que é onde mora sua mãe.

7. (alternativa A) Como os triângulos sombreados são congruentes, os segmentos AP e PC da figura medem ambos 1 cm. Logo os catetos do triângulo ABC medem 1 cm e 2 cm, e o teorema de Pitágoras nos diz que $AB^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Segue que $AB = \sqrt{5} \text{ cm}$, donde o perímetro do triângulo ABC é $1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5} \text{ cm}$.



8. (alternativa A) Se o peso de uma turmalina é o dobro do peso de outra, então seu peso é cinco vezes o preço da outra; isto equivale a dizer que se uma turmalina pesa a metade de outra, então seu preço é um quinto do preço da outra. Zita dividiu sua turmalina em 4 pedras iguais, o que equivale a primeiro dividi-la em 2 turmalinas iguais e depois dividir cada uma dessas em 2 também iguais. No primeiro passo, Zita ficará com 2 turmalinas cada uma de valor $\frac{1000}{5} = 200$ reais. Depois do segundo passo, Zita terá 4 turmalinas, cada uma valendo

$$\frac{200}{5} = 40 \text{ reais; essas 4 turmalinas juntas valem } 4 \times 40 = 160 \text{ reais.}$$

Podemos esquematizar a solução da seguinte forma, mostrando como calcular o preço de uma das quatro turmalinas menores:

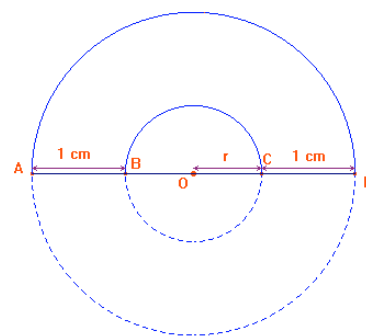
$$\underbrace{\text{peso inicial}}_{\text{valor: 1000}} \xrightarrow{\text{peso} \div 2 \atop \text{valor} \div 5} \frac{1}{2} \underbrace{\text{do peso inicial}}_{\text{valor: } 1000 \div 5 = 200} \xrightarrow{\text{peso} \div 2 \atop \text{valor} \div 5} \frac{1}{4} \underbrace{\text{do peso inicial}}_{\text{valor: } 200 \div 5 = 40}$$

9. (alternativa C) Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

polígono	perímetro (em ℓ)	área (em ℓ^2)
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$
IV	34	$25 - 7 = 18$

Desse modo, a correspondência é $I \rightarrow (20,25)$, $II \rightarrow (20,22)$, $III \rightarrow (30,18)$ e $IV \rightarrow (34,20)$. Os pontos correspondentes a I e II têm a mesma abscissa (perímetro), logo estão na mesma vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima, e segue que para estes pontos a correspondência correta é $I \rightarrow C$ e $II \rightarrow B$. Por outro lado, os pontos correspondentes a III e IV têm a mesma ordenada (área), logo estão na mesma horizontal no plano cartesiano; como o ponto correspondente a IV tem abscissa (perímetro) maior, ele está mais à direita. Segue que para esses pontos a correspondência correta é $III \rightarrow D$ e $IV \rightarrow A$.

10. (alternativa D) Consideremos as circunferências que determinam os dois semicírculos, como na figura. O segmento AD é um diâmetro da circunferência maior e BC um diâmetro da menor. O centro da circunferência menor é o ponto médio O de BC ; como $AB = CD$ esse ponto também é ponto médio do segmento AD , ou seja, ele também é o centro da circunferência maior.



Vamos denotar por r o raio da circunferência menor; então o raio da maior é $r+1$. Como o perímetro de uma circunferência é $2\pi \times \text{raio}$, segue que a primeira formiguinha andou $\pi(r+1)$ cm e a segunda $1 + \pi r + 1 = 2 + \pi r$ cm. Logo a diferença entre os percursos é $\pi(r+1) - (2 + \pi r) = \pi r + \pi - 2 - \pi r = \pi - 2$ cm.

11. (alternativa B) Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

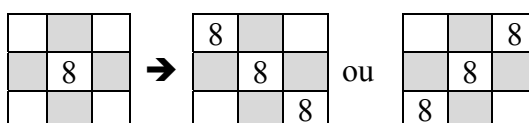
12. (alternativa C) Vamos denotar por x o outro número. Como os 3 números que aparecem em cada linha são todos diferentes, x é diferente de 5 e de 8. Como cada número aparece uma única vez em cada linha, segue que esses números aparecem, cada um, exatamente três vezes na tabela.

Notamos que o 5 não pode aparecer na casa central. De fato, se ele estivesse nessa casa então as casas em cinza da tabela abaixo não poderiam conter outro 5; como os números em cada

linha são diferentes, a única possibilidade para os outros dois números 5 seria preencher uma das duas diagonais, o que não pode acontecer pois $5 + 5 + 5 = 15$ é ímpar.



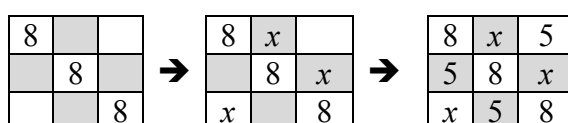
Vamos então tentar o 8 na casa central. Analogamente, teremos que ter 8 em uma das diagonais:



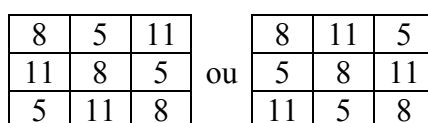
Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:



ou

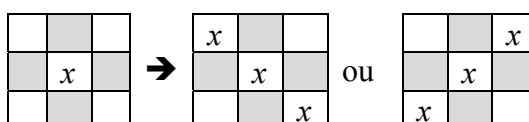


Para satisfazer todas as condições do problema, as somas nas diagonais devem ser iguais. Em ambas as formas acima isso leva a $24 = 5 + 8 + x = 13 + x$, donde $x = 11$ e os tabuleiros acima são

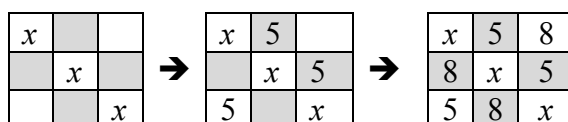


A outra opção leva a um resultado análogo, e vemos que em qualquer caso a soma das diagonais é 24.

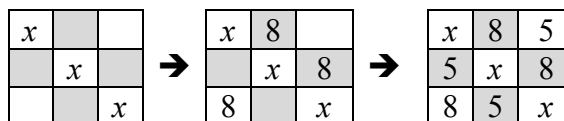
Resta ainda analisar o caso em que o x está na casa central. Como antes, devemos ter uma das duas diagonais preenchida com x :



Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:



ou



Ambas mostram que $3x = 5 + x + 8 = 13 + x$, donde $2x = 13$. A segunda opção leva à mesma equação; como ela não tem solução para x natural, concluímos que x não pode estar na casa central.

13. (alternativa E) Para resolver essa questão, precisamos saber qual é a área coberta de cada um dos três quadrados de centros A , B e C . Para isso, vamos considerar a figura ao lado, onde representamos os quadrados de centros A e B . A área coberta no quadrado de centro A é o polígono sombreado $AQRT$.

Pelo ponto A traçamos as perpendiculares AP e AS aos lados do quadrado. Como A é o centro do quadrado, é imediato que $APRS$ é um quadrado; sua área é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior, ou seja, é

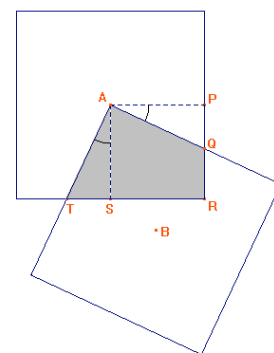
$\frac{1}{4} \times 100 = 25 \text{ cm}^2$. Além disso os ângulos $P\hat{A}Q$ e $S\hat{A}T$, marcados na figura, são iguais; de fato, temos

$$P\hat{A}Q = P\hat{A}S - Q\hat{A}S = 90^\circ - Q\hat{A}S = Q\hat{A}T - Q\hat{A}S = S\hat{A}T.$$

Segue que os triângulos APQ e AST são congruentes, pois são triângulos retângulos com um lado e um ângulo comuns. Logo

$$\begin{aligned} \text{área}(AQRT) &= \text{área}(AST) + \text{área}(AQRS) = \text{área}(APQ) + \text{área}(AQRS) \\ &= \text{área}(APRS) = 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, as áreas cobertas nos quadrados de centros B e C são iguais a 25 cm^2 . Logo a área da figura é $3 \times 75 + 100 = 325 \text{ cm}^2$.



14. (alternativa B) A decomposição de 50 em fatores primos é $50 = 2 \times 5^2$. Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como $(2 \times 5^2)^3 < 5^p < (2 \times 5^2)^4$, ou seja, $2^3 \times 5^6 < 5^p < 2^4 \times 5^8$. Dividindo todos os termos por 5^6 , obtemos $2^3 < 5^{p-6} < 2^4 \times 5^2$, ou seja, $8 < 5^{p-6} < 400$. As únicas potências de 5 que estão entre 8 e 400 são $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$; logo $p - 6$ só pode assumir os valores 2 e 3, donde p só pode assumir os valores 8 e 9.

15. (alternativa E) Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o das unidades; então $n = 10a + b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b + a$. Desse modo, a soma de n e de seu contrário é.

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$$

e portanto a soma de um número com seu contrário é sempre um múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções são múltiplos de 11, com a exceção de 181.

As outras opções são todas somas de um número com seu contrário; de fato, $44 = 13 + 31$, $99 = 18 + 81$, $121 = 29 + 92$ e $165 = 69 + 96$.

Como foram achadas essas expressões? Tomemos, como exemplo, $165 = 11 \times 15$. O raciocínio inicial mostra que se escolhermos algarismos não nulos a e b de modo que sua soma seja 15, então 165 será a soma do número $10a + b$ e de seu contrário. Por exemplo, podemos tomar $a = 6$ e $b = 9$; para essa escolha obtemos a expressão $165 = 69 + 96$. Outras escolhas são possíveis; por exemplo, $a = 8$ e $b = 7$ leva a $165 = 87 + 78$. O mesmo raciocínio serve para as outras alternativas.

16. (alternativa C) O gráfico mostra que com uma mistura contendo 30% de álcool o carro de Cristina rende 15 km/l. Para a primeira etapa de 300 km, ela gastou então $\frac{300}{15} = 20$ litros de combustível, restando no tanque $50 - 20 = 30$ litros com 30% de álcool. Desses 30 litros 30%, ou seja, $\frac{30}{100} \times 30 = 9$ litros eram de álcool e os restantes $30 - 9 = 21$ litros, de gasolina. Para completar o tanque ela colocou 20 litros de álcool; o tanque ficou então cheio com $9 + 20 = 29$ litros de álcool e os mesmos 21 litros de gasolina. Nessa mistura o percentual de álcool era de $\frac{29}{50} = \frac{58}{100} = 58\%$, que é aproximadamente 60%. O gráfico mostra que com essa mistura o carro de Cristina rende aproximadamente 13,5 km/l. Como ela chegou a seu destino com o tanque praticamente vazio, ela percorreu aproximadamente $13,5 \times 50 = 675$ km. Logo, a viagem de Cristina foi de aproximadamente $300 + 675 = 975$ km.

17. (alternativa C) A flecha que aponta para baixo na tabela passa pelos quadrados dos números ímpares: $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ e assim por diante.

									...
								...	
	37	36	35	34	33	32	31		
	38	17	16	15	14	13	30		
	39	18	5	4	3	12	29		
	40	19	6	1	2	11	28	...	
	41	20	7	8	9	10	27	...	
	42	21	22	23	24	25	26	51	
	43	44	45	46	47	48	49	50	

Vamos chamar de a_n o n -ésimo termo de nossa sequência; por exemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 13$ e $a_4 = 31$. Observando a tabela, vemos que

$$\begin{aligned} 1^2 &\xrightarrow{1 \text{ casa para a direita}} 1^2 + 1 = 2 \xrightarrow{1 \text{ casa para cima}} 1^2 + 1 + 1 = 3 = a_2 \\ 3^2 &\xrightarrow{1 \text{ casa para a direita}} 3^2 + 1 = 10 \xrightarrow{3 \text{ casas para cima}} 3^2 + 1 + 3 = 13 = a_3 \\ 5^2 &\xrightarrow{1 \text{ casa para a direita}} 5^2 + 1 = 26 \xrightarrow{5 \text{ casas para cima}} 5^2 + 1 + 5 = 31 = a_4 \end{aligned}$$

e assim por diante. Vemos então que a lei de formação da sequência, a partir de a_2 , é

$$a_2 = [1^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 1^\circ \text{ ímpar}$$

$$a_3 = [2^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 2^\circ \text{ ímpar}$$

$$a_4 = [3^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 3^\circ \text{ ímpar}$$

e, em geral,

$$a_n = [(n-1)^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + (n-1)^\circ \text{ ímpar}$$

Logo $a_{30} = [29^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 29^\circ \text{ ímpar}$, e como o 29° número ímpar é 57 segue que $a_{30} = 57^2 + 1 + 57 = 3307$.

Mais geralmente, o $(n-1)^\circ$ número ímpar é $2(n-1)-1 = 2n-3$ e segue que $a_n = (2n-3)^2 + 1 + (2n-3) = 4n^2 - 10n + 7$.

18. (alternativa B) Inicialmente notamos que a função é decrescente, pois à medida que x cresce a área ($BCDP$) decresce; isso elimina as alternativas (A) e (D). Notamos também que como os triângulos ACB e ACD são congruentes, suas alturas BQ e DR são iguais; vamos denotá-las por h , como na figura. Então os triângulos BCP e DCP têm a mesma base CP e a mesma altura h , donde

$$\text{área}(BCP) = \frac{CP \times h}{2} = \text{área}(DCP).$$

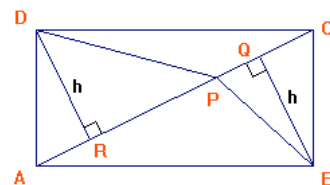
Logo

$$\text{área}(BCDP) = \text{área}(BCP) + \text{área}(DCP) = 2 \times \frac{CP \times h}{2} = CP \times h.$$

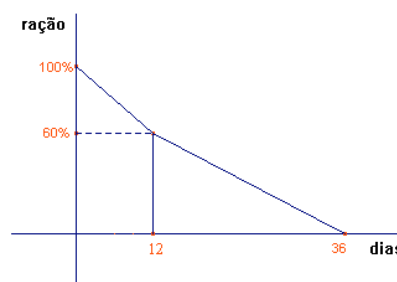
Vamos denotar por a o comprimento da diagonal AC . Então $CP = a - x$ e temos

$$\text{área}(BCDP) = (a - x)h = ah - hx.$$

Como ah e h são constantes, segue que a área ($BCDP$) é uma função linear de x , o que elimina as alternativas (C) e (E).



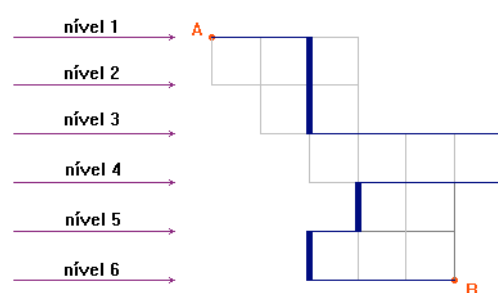
19. (alternativa B) Vamos denotar por u a quantidade de ração que uma vaca come em um dia. No início o fazendeiro tinha ração suficiente para alimentar 20 vacas por 30 dias; logo, ele tinha $20 \times 30 = 600u$ de ração. O gráfico indica que no dia da venda ele já havia gasto 40%



da ração, ou seja, $\frac{40}{100} \times 600 = 240 u$. Como as 20 vacas comem 20 u de ração por dia, a venda ocorreu no $\frac{240}{20} = 12^\circ$ dia.

Vamos denotar por x o número de vacas que ele vendeu. Ele ficou então com $20 - x$ vacas, e as $600 - 240 = 360 u$ de ração que ele tinha no momento da venda foram suficientes para alimentar essas vacas por $36 - 12 = 24$ dias. Logo $(20 - x) \times 24 = 360$, donde $20 - x = \frac{360}{24} = 15$, ou seja, $x = 5$.

20. (alternativa E) Para ir de A até B a formiguinha tem que descer do nível 1 até o nível 6, conforme a figura. O caminho que a formiguinha segue é determinado pela escolha do segmento vertical que ela vai usar para passar de um nível para o seguinte, pois o caminho horizontal que liga dois segmentos verticais ligando níveis consecutivos é único. Como exemplo mostramos na figura, em traço mais forte, os segmentos que ela escolheu para fazer o caminho ilustrado no enunciado. O número de segmentos que ela pode usar para passar de um nível para o outro está tabulado a seguir:



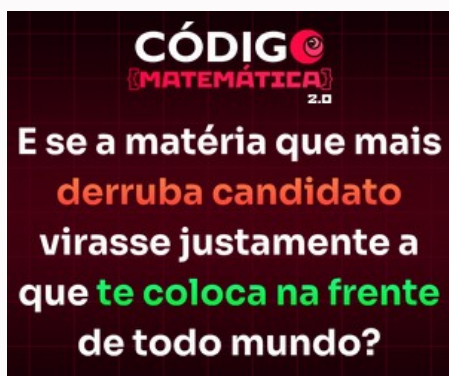
$1 \rightarrow 2$: 4 segmentos	$4 \rightarrow 5$: 3 segmentos
$2 \rightarrow 3$: 3 segmentos	$5 \rightarrow 6$: 4 segmentos
$3 \rightarrow 4$: 5 segmentos	

Segue que o número de maneiras que nossa formiguinha tem para ir de A até B é $4 \times 3 \times 5 \times 3 \times 4 = 720$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

