



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR
PROCESSO SELETIVO UFES 2012

As bancas elaboradoras esperam obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

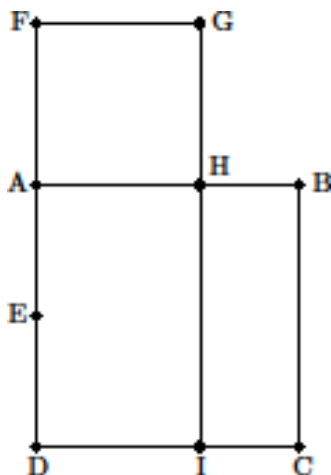
MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO

- A) Seja x o valor (em reais) que o Senhor Silva pagou pelo apartamento. Se o apartamento fosse vendido por $R\$ 640.000,00$, então o lucro seria de 60% , isto é, $1,6x = 640000$, logo $x = 400000$. Portanto, o Senhor Silva pagou $R\$ 400.000,00$ pelo apartamento.
- B) O lucro L obtido pela venda do apartamento por $R\$ 476.000,00$ pode ser calculado por $(1 + L) 400000 = 476000$, então $1 + L = \frac{476000}{400000} = 1,19$, o que nos dá $L = 0,19$. Portanto, o lucro percentual pela venda do apartamento foi de 19% .

2ª QUESTÃO

- A) Um esboço da figura descrita no problema é a seguinte





UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR
PROCESSO SELETIVO UFES 2012

- B) O problema nos pede que determinemos o valor numérico de certas razões e, por esse motivo, podemos fixar uma unidade de medida de comprimento que desejarmos. Consideremos, pois, que o segmento AB tenha medida a cm e que o segmento AH tenha medida x cm, sendo a e x números reais positivos. Sabemos que $ABCD$ é um quadrado, logo o triângulo EAB é retângulo, e seus catetos EA e AB medem $\frac{a}{2}$ e a , respectivamente. Além disso, a hipotenusa EB tem a mesma medida que o segmento EF , cuja medida é $\frac{a}{2} + x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo EAB obtemos

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2,$$

donde concluímos que $a^2 = ax + x^2$ e, portanto, que $x^2 = a(a - x)$. Entretanto, a área do quadrado $AFGH$ tem medida x^2 cm² e a área do retângulo $HBCI$ tem medida $a(a - x)$ cm². Portanto, a igualdade $x^2 = a(a - x)$ significa que o valor numérico da razão entre as áreas do quadrado $AFGH$ e do retângulo $HBCI$ é igual a 1.

- C) Podemos resolver a equação quadrática $x^2 = a(a - x)$, ou seja, $x^2 + ax - a^2 = 0$, e obter o valor de x em função de a . O resultado é

$$x = a \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

pois sabemos que os números reais x e a são ambos positivos. Portanto, o valor numérico da razão entre os comprimentos dos segmentos AH e AB é a fração $\frac{x}{a}$, que é igual ao número real $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3ª QUESTÃO

- A) Denominemos por x a quantidade de dias em que Lucas não acessou a internet e estudou; por y a quantidade de dias em que Lucas acessou a internet e estudou; e por z a quantidade de dias em que Lucas não estudou. Desse modo, o saldo do Lucas (em reais) é dado por $S = 20x + 5y - 15z$, pois Lucas, ao não acessar a internet e estudar (variável x) recebe R\$ 20,00; ao acessar a internet e estudar (variável y) recebe R\$ 5,00; ao não estudar (variável z)



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR
PROCESSO SELETIVO UFES 2012

ele devolve R\$ 15,00. Além disso, como o período de dias considerado é de 30 dias, então $x + y + z = 30$. Considerando também que, a quantidade de dias em que Lucas acessou a internet e estudou foi igual à soma da quantidade de dias em que ele não acessou a internet e estudou com a quantidade de dias em que ele não estudou, obtemos $y = x + z$. Por último, sabe-se que ao final do período de 30 dias considerado Lucas teve um saldo de R\$305,00, ou seja, $S = 305$. Deste modo, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x - y + z = 0 \\ 20x + 5y - 15z = 305 \end{cases}$$

Um dos modos de resolver esse sistema consiste em observar que, da segunda equação tem-se $x + z = y$, a qual, por sua vez, substituída na primeira equação nos dá $2y = 30$ e, portanto, $y = 15$. Disso segue que $z = 15 - x$. Substituindo esses dados na terceira equação obtemos $305 = 20x + 75 - 225 + 15x = 35x - 150$, donde segue que $x = \frac{455}{35} = 13$. Portanto, Lucas não acessou a internet e estudou em 13 dias desse período.

- B) Em outro período de 30 dias deveremos ter novamente $x + y + z = 30$. Queremos então, determinar todos os possíveis valores de $S = 20x + 5y - 15z$ que Lucas poderá receber nesse período. Como agora Lucas estudará todos os dias desse período então $z = 0$. Portanto agora obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 20x + 5y = S \\ x + y = 30 \end{cases}$$

Escrevendo a segunda equação como $x = 30 - y$ e substituindo na primeira equação obtemos $S = 20(30 - y) + 5y = 600 - 15y$. Portanto $y = 40 - \frac{S}{15}$. Entretanto, sabemos que y é um número inteiro e que $0 \leq y \leq 30$, logo $0 \leq 40 - \frac{S}{15} \leq 30$. Consequentemente $0 \leq 600 - S \leq 450$, ou seja, $150 \leq S \leq 600$. No entanto, também sabemos que $S = 600 - 15y = 15(40 - y)$, ou seja, S é um múltiplo inteiro de 15. Concluímos então que os possíveis valores de S são os números inteiros da forma $15n$, para

$$n = 10, 11, \dots, 40.$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR
PROCESSO SELETIVO UFES 2012

4ª QUESTÃO

- A) De acordo com as informações do problema, um ponto da trajetória do alvo que tenha coordenadas (x, y) verifica a equação $y = ax^2 + bx + c$, sendo a, b, c números reais fixados. Como a trajetória passa pelo ponto $A = (0, 0)$ então $c = 0$. Disto segue que a equação torna-se $y = ax^2 + bx = x(ax + b)$. Entretanto, sabemos também que a trajetória passa pelo ponto $B = (24, 0)$, daí temos $0 = 24(24a + b)$, ou seja $b = -24a$. Desse modo, a equação toma a forma $y = ax(x - 24) = ax^2 - 24ax$. Resta, portanto, apenas determinar o valor da constante a . Para isso, utilizamos o fato de que a altura máxima dessa parábola é atingida em seu vértice. As coordenadas do vértice (x_v, y_v) da parábola $y = ax^2 - 24ax$ são, respectivamente,

$$x_v = \frac{24a}{2a} = 12 \text{ e } y_v = a(12)^2 - 2(12)^2a = -(12)^2a.$$

Mas a altura máxima da trajetória é de 16 m , logo $-(12)^2a = y_v = 16$ e, portanto, $a = -\frac{1}{9}$.

Consequentemente $b = \frac{8}{3}$. Portanto, a equação da parábola que descreve a trajetória do alvo é $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$.

- B) A equação da reta r é da forma $y = mx$, sendo m um número real fixado, pois a reta r passa pela origem $(0, 0)$. A declividade dessa reta é $m = \text{tg}(30) = \sqrt{3}/3$, logo, a equação da reta r é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Entretanto essa reta intersecta a trajetória parabólica no ponto $P = (x_0, y_0)$. Portanto $\frac{\sqrt{3}}{3}x_0 = -\frac{1}{9}x_0^2 + \frac{8}{3}x_0$. Como $x_0 \neq 0$, a solução dessa equação é $x_0 = 24 - 3\sqrt{3}$. Consequentemente, as coordenadas do ponto P são $x_0 = 24 - 3\sqrt{3}$ e $y_0 = 8\sqrt{3} - 3$.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR
PROCESSO SELETIVO UFES 2012

5ª QUESTÃO

A) Utilizando algumas das relações trigonométricas elementares podemos calcular

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

e concluir que

$$a_{12} = \cos(2x) + 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2\sin^2(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Para calcular o valor de a_{13} observamos inicialmente que $\operatorname{tg}(-3\pi) = \frac{\sin(-3\pi)}{\cos(-3\pi)}$. Agora, observe que,

$$\sin(-3\pi) = \sin(-3\pi + 4\pi) = \sin(\pi) = 0.$$

Disso segue que $\operatorname{tg}(-3\pi) = 0$. Agora, para calcular o valor de $\sec(9\pi)$ devemos calcular o valor de $\cos(9\pi)$. Para isso, observe que,

$$\cos(9\pi) = \cos(\pi + 8\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

Desse modo obtemos $\sec(9\pi) = \frac{1}{\cos(9\pi)} = -1$, e concluímos assim que $a_{13} = -1$ e $a_{12} = 1$.

B) Como tais números estão em uma progressão aritmética cuja soma é 3 segue-se que $2 + a_{22} + a_{23} = 3$, e também que $a_{22} = 2 + r$ e $a_{23} = 2 + 2r$. Disso obtemos

$$3 = 2 + a_{22} + a_{23} = 2 + 2 + r + 2 + 2r = 6 + 3r,$$

e, portanto, $r = -1$. Concluímos então que $a_{22} = 1$ e $a_{23} = 0$.

C) Observamos que podemos escrever a equação dada na forma $z(z^2 - 4z + 5) = 0$. Assim, é claro que $z = 0$ é raiz dessa equação. As outras raízes são as raízes da equação quadrática $z^2 - 4z + 5 = 0$, cujas raízes são

$$z_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 + i \text{ e } z_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 - i$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR
PROCESSO SELETIVO UFES 2012

Agora, sabemos que os elementos a_{31} e a_{32} são ambos positivos, e, além disso, são respectivamente a parte real e a parte imaginária de uma das raízes complexas da equação dada, logo $a_{31} = 2$ e $a_{32} = 1$. Desse modo concluímos que a matriz A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} b & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix}$$

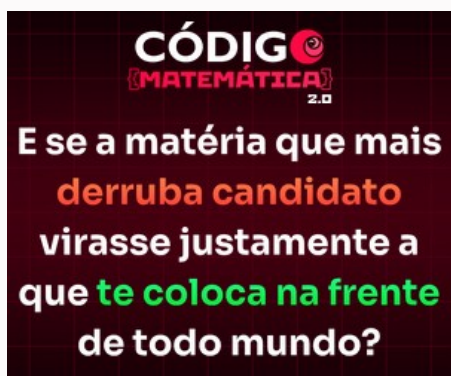
e, portanto, o seu determinante é $\det(A) = bc - 2 + 2 - 2c = bc - 2c$. Como devemos ter $b = c = \det(A)$, então $c = \det(A) = bc - 2c = c^2 - 2c$, logo $c(c - 3) = 0$.

Consequentemente $c = 0$ ou $c = 3$. Entretanto, sabe-se que a matriz A é invertível, logo $c = \det(A) \neq 0$. Disso concluímos que $c = 3$. Assim, $b = c = 3$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

