

OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 2

QUESTÃO 1

a) 1ª solução: A figura ao lado mostra como decompor a região $ACDE$ em um quadrado $CDEH$ e um triângulo AGE . Como $CD = DE = 10$ e $AC = 20$, segue que $AG = 10$. Logo a área do triângulo AGE é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é

$$\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}^2.$$

Como a área do quadrado $CDEH$ é $10^2 = 100 \text{ m}^2$, concluímos que a área da região $ACDE$ é $100 + 50 = 150 \text{ m}^2$.

Alternativamente, podemos calcular a área de $ACDE$ como a diferença entre as áreas do retângulo $ACDG$ e do triângulo AHE , ou seja, $20 \times 10 - \frac{10 \times 10}{2} = 150 \text{ m}^2$.

2ª solução: Podemos calcular a área do trapézio retângulo $ACDE$ pela fórmula usual

$$\frac{(AC + DE) \times CD}{2} = \frac{(20 + 10) \times 10}{2} = 150 \text{ m}^2$$

A área total do terreno é então

$$\text{área}(ACDE) + \text{área}(ABC) = 150 + 120 = 270 \text{ m}^2.$$

b) 1ª solução: Como o terreno tem 270 m^2 , ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de

$$\frac{270}{2} = 135 \text{ m}^2.$$

Desse modo, devemos ter

$$135 = \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) = 120 + \text{área}(ACF)$$

e vemos que $\text{área}(ACF) = 15 \text{ m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é

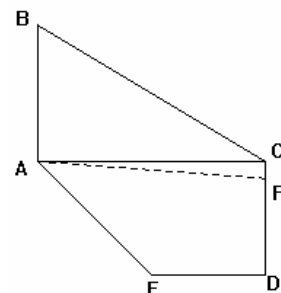
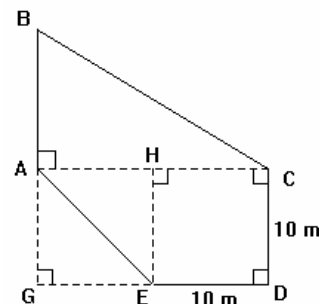
$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF.$$

Portanto $10 \times CF = 15$ e logo $CF = 1,5 \text{ m}$.

2ª solução: Como o terreno tem 270 m^2 , ao dividi-lo nas partes de mesma área $ABCF$ e $AFDE$, cada parte terá área de 135 m^2 . Notamos que $ABCF$ é um trapézio de bases AB e CF e de altura $AC = 20$; logo

$$135 = \text{área}(ABCF) = \frac{(12 + CF) \times 20}{2} = 120 + 10 \times CF$$

e segue que $CF = 1,5$.

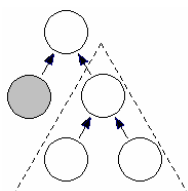
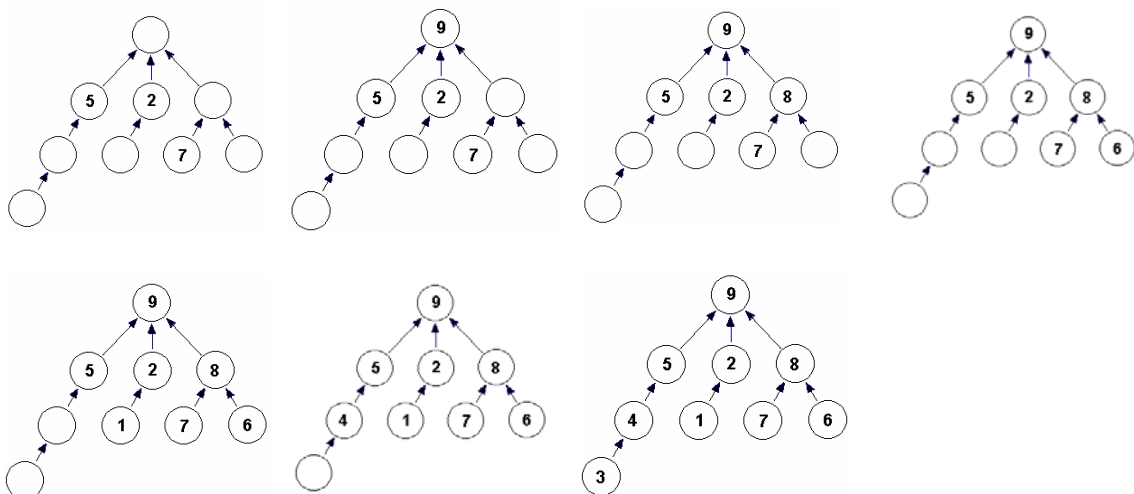


QUESTÃO 2

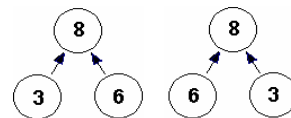
a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8, ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

A sequência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.



b) *1ª solução:* Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

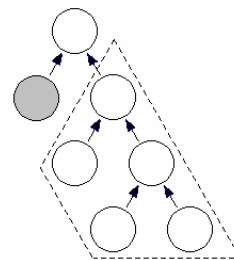
Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.

OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 2

c) *1ª solução:* Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

- preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.



2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (b), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (b). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $8 + 40 = 48$ maneiras diferentes.

OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 2

QUESTÃO 3

Para facilitar a escrita da solução, vamos dizer que x é pai de y se y é filho de x .

a) Suponhamos que $\frac{5}{7}$ seja filho de um número positivo x . Então $\frac{5}{7} = x + 1$ ou $\frac{5}{7} = \frac{x}{x+1}$. A primeira equação leva a

$$x = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}$$

o que não pode acontecer pois $x > 0$. A segunda equação leva a

$$7x = 5(x+1) = 5x + 5.$$

donde $2x = 5$ e segue que $x = \frac{5}{2}$. Logo o irmão de $\frac{5}{7}$ é $\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.

b) 1ª solução: Notamos que se x é um número positivo então $x+1 > 1$ (em particular, $x+1$ é positivo) e $x+1 > x$ (isto vale para qualquer número, não só para os positivos). Da última desigualdade e do fato de que $x+1$ é positivo concluímos que $\frac{x}{x+1} < 1$; e como $\frac{x}{x+1}$ é um quociente de números positivos, concluímos que $0 < \frac{x}{x+1} < 1$. Logo dos filhos de x um é maior que 1 (o $x+1$) e outro menor do que 1 (o $\frac{x}{x+1}$); em particular, o 1 não tem pai. Vamos agora procurar os possíveis pais x de um número positivo y .

- se $y > 1$ então $y = x+1$ e o pai de y é $x = y-1$.
- se $y < 1$ então $y = \frac{x}{x+1}$ e o pai de y é $x = \frac{y}{1-y}$.

Concluímos que se y é positivo e $y \neq 1$ então y só tem um pai.

2ª solução: Suponhamos que y seja filho de x e de z . Temos então as possibilidades $x+1 = z+1$, $\frac{x}{x+1} = \frac{z}{z+1}$, $x+1 = \frac{z}{z+1}$ ou $\frac{x}{x+1} = z+1$; notamos que os dois últimos casos são equivalentes. No primeiro e no segundo caso obtemos $x = z$, e no terceiro chegamos a $x(z+1) = -1$, que não tem solução pois x e z devem ser positivos. Logo, se y tem pai, ele é único.

c) Vamos chamar $\frac{x}{x+1}$ de *filho menor* de x . Quando $x = \frac{1}{n}$ o filho menor de x é

$$\frac{x}{x+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n+1}$$

Logo o filho menor de 1 é $\frac{1}{2}$, o filho menor de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{3}$, o filho menor de $\frac{1}{3}$ é $\frac{1}{4}$ e assim por diante, até chegarmos a $\frac{1}{2008}$ como o filho menor de $\frac{1}{2007}$.

OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 2

QUESTÃO 4

a) Dividimos o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nos subconjuntos $\{1, 4, 6, 7\}$ e $\{2, 3, 5, 8\}$. Como

$$1 + 4 + 6 + 7 = 18 = 2 + 3 + 5 + 8$$

e

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 102 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2.$$

vemos que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é equilibrado.

b) Seja $A = \{a+1, a+2, a+3, \dots, a+8\}$ um conjunto arbitrário de 8 números inteiros consecutivos. Do item (a) sabemos que $1 + 4 + 6 + 7 = 2 + 3 + 5 + 8$ (*) e $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$ (**). Da primeira igualdade segue que

$$(a+1) + (a+4) + (a+6) + (a+7) = (a+2) + (a+3) + (a+5) + (a+8)$$

ou seja, podemos dividir A nos subconjuntos $\{a+1, a+4, a+6, a+7\}$ e $\{a+2, a+3, a+5, a+8\}$ que têm a mesma soma. Para ver que a condição na soma dos quadrados também vale, basta calcular

$$(a+1)^2 + (a+4)^2 + (a+6)^2 + (a+7)^2 = 4a^2 + 2a(1+4+6+7) + (1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2)$$

e

$$(a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + (a+8)^2 = 4a^2 + 2a(2+3+5+8) + (2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2).$$

Usando (*) e (**), concluímos que A é equilibrado.

Uma solução análoga é quando escrevemos $A = \{a, a+1, a+2, \dots, a+7\}$. Neste caso, deve-se observar primeiramente que $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ é equilibrado; para ver isto, basta dividi-lo em $\{0, 3, 5, 6\}$ e $\{1, 2, 4, 7\}$. O restante da solução é idêntico, dividindo A nos subconjuntos $\{a, a+3, a+5, a+6\}$ e $\{a+1, a+2, a+4, a+7\}$.

c) Suponhamos que exista um número inteiro a tal que o conjunto $\{a, a+1, a+2, a+3\}$ seja equilibrado. A soma dos elementos desse conjunto é $4a+6$; para que ele satisfaça a primeira condição de um conjunto equilibrado, devemos dividi-lo em dois subconjuntos de dois elementos cada um e tais que a soma dos elementos de cada um deles seja $\frac{1}{2}(4a+6) = 2a+3$; isto só é possível quando os subconjuntos são $\{a, a+3\}$ e $\{a+1, a+2\}$. Para que a segunda condição de um conjunto equilibrado seja satisfeita, devemos ter

$$a^2 + (a+3)^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2$$

ou seja

$$2a^2 + 6a + 9 = 2a^2 + 6a + 5.$$

Simplificando essa última igualdade chegamos a $4 = 0$, um absurdo. Logo nenhum conjunto com quatro inteiros consecutivos é equilibrado.

OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 2

QUESTÃO 5

a) Para calcular a área do polígono $AMBNCPDQ$, basta observar que ele pode ser dividido no paralelogramo $ABCD$ e nos triângulos AMB , BNC , CPD e DQA . Como M , N , P e Q são centros de quadrados, a área de cada um desses triângulos é um quarto da área do quadrado correspondente. Como dois desses quadrados têm área $4^2 = 16$ e os outros dois têm área $6^2 = 36$, a área procurada é

$$\begin{aligned} & \text{área}(ABCD) + \text{áreas dos triângulos} \\ &= 20 + \frac{1}{4}(16 + 16 + 36 + 36) = 46 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

b) Seja α a medida do ângulo $\widehat{DAB}$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, segue que $\widehat{ABC} = 180^\circ - \alpha$. Por outro lado, como M , N e Q são centros dos quadrados correspondentes, os ângulos marcados em preto na figura ao lado são todos iguais a 45° . Logo

$$\widehat{MAQ} = \widehat{QAD} + \widehat{DAB} + \widehat{BAM} = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = \alpha + 90^\circ$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{MBN} &= 360^\circ - (\widehat{ABM} + \widehat{ABC} + \widehat{NBC}) \\ &= 360^\circ - [45^\circ + (180^\circ - \alpha) + 45^\circ] \\ &= \alpha + 90^\circ \end{aligned}$$

donde $\widehat{MAQ} = \widehat{MBN}$.

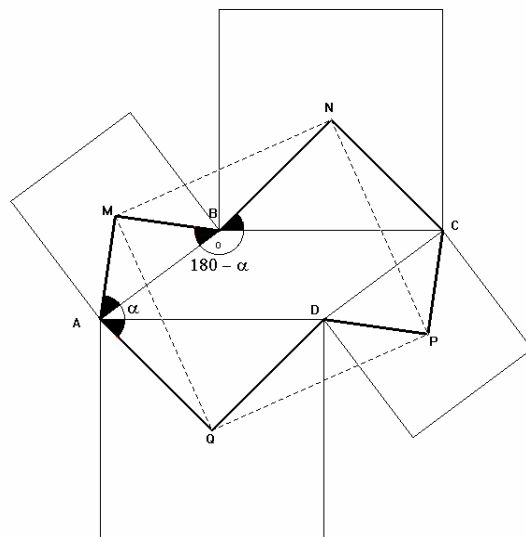
c) Como os quadrados sobre AB e CD são iguais, bem como os quadrados sobre BC e AD , e como M , N , P e Q são centros desses quadrados, temos $AM = MB = CP = PD$ e $BN = NC = AQ = QD$. Por outro lado, segue do item anterior que $\widehat{MAQ} = \widehat{MBN} = \widehat{NCP} = \widehat{PDQ}$, donde os triângulos QAM , MBN , NCP e PDQ são congruentes. Como $MNPQ$ é obtido de $AMBNCPDQ$, retirando-se os triângulos QAM e NCP e adicionando-se os triângulos MBN e PDQ , temos $\text{área}(MNPQ) = \text{área}(AMBNCPDQ) = 46 \text{ cm}^2$.

A congruência dos triângulos QAM , NBM , NCP e QDP mostra que $QM = MN = NP = PQ$, ou seja, $MNPQ$ é um losango. Para mostrar que $MNPQ$ é um quadrado, basta então mostrar que um de seus ângulos internos é igual a 90° ; vamos fazer isso para $\widehat{QMN}$. Como M é o centro do quadrado sobre AB , temos que $\widehat{AMB} = 90^\circ$; por outro lado, da congruência dos triângulos AMQ e MBN tiramos $\widehat{QMA} = \widehat{BMN}$. Logo

$$\widehat{QMN} = \widehat{BMN} + \widehat{QMB} = \widehat{QMA} + \widehat{QMB} = 90^\circ$$

e segue que $MNPQ$ é um quadrado.

Alternativamente, basta mostrar que $QM = NP$ e que $\widehat{QMN} = 90^\circ$, como acima, e finalizar argumentando (por exemplo, por simetria) que a situação é idêntica nos outros vértices.



OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 2

QUESTÃO 6

a) Vamos calcular a posição ocupada, após um embaralhamento, pela n -ésima carta da pilha. Há dois casos a considerar:

- $n \leq 52$ (ou seja, a carta está na metade superior da pilha): neste caso, após um embaralhamento, ficarão acima dela as primeiras n cartas da metade inferior e as primeiras $n-1$ cartas da parte superior. Logo, sua posição na pilha passará a ser $n + (n-1) + 1 = 2n$.
- $n > 52$ (ou seja, a carta está na metade inferior da pilha). Após um embaralhamento, ficarão acima dela as cartas precedentes da metade inferior, que são em número de $n - 52 - 1 = n - 53$ e igual quantidade de cartas da metade superior. Logo, sua nova posição na pilha é $(n - 53) + (n - 53) + 1 = 2n - 105$.

Em particular, podemos agora completar a tabela, observando que $55 = 2 \times 80 - 105$ e $5 = 2 \times 55 - 105$.

número de embaralhamentos a partir da situação inicial	1	2	3	4	5	6
posição da carta de número 5 a partir do topo da pilha	10 ^a	20 ^a	40 ^a	80 ^a	55 ^a	5 ^a

b) Como visto acima, a carta que ocupa a posição n passa a ocupar, após um embaralhamento, a posição $2n$, se $n \leq 52$ ou $2n - 105$, se $n > 52$.

c) Inicialmente, observamos que após um embaralhamento

- as cartas da metade superior da pilha se movem para baixo, pois $2n > n$ para todo n positivo;
- as cartas da metade inferior da pilha se movem para cima, pois $2n - 105 < n$ para todo $n < 105$.

Logo, para que duas cartas troquem de posição entre si, uma delas deverá estar na metade superior da pilha e outra na metade inferior. Suponhamos que existam duas cartas com essa propriedade, e seja n a posição da carta de metade superior. Após um embaralhamento ela se move para a posição $2n$, e então a carta na posição $2n$ deve passar para a posição n . Como a carta na posição $2n$ está na metade inferior da pilha, devemos ter $2(2n) - 105 = n$, donde $n = 35$. E, de fato, as cartas nas posições 35 e 70 trocam de posição entre si a cada embaralhamento, pois $2 \times 35 = 70$ e $2 \times (2 \times 35) - 105 = 35$. Além disso, concluímos que não há outro par de posições com esta propriedade.

d) Para simplificar a exposição, vamos escrever $x \rightarrow y$ para indicar que a carta que está na posição x vai para a posição y após um embaralhamento.

Suponhamos que exista um trio fixo, e seja n a posição da primeira carta desse trio a contar do topo da pilha. O argumento do item (c) mostra que as cartas não podem estar todas na metade superior ou todas na metade inferior da pilha; logo a posição n está na metade superior da pilha.

Após um embaralhamento temos $n \rightarrow 2n$; se $2n$ está na parte superior da pilha então o trio fixo deve ser $n \rightarrow 2n \rightarrow 4n \rightarrow n$; se $2n$ está na metade inferior da pilha então o trio fixo deve ser $n \rightarrow 2n \rightarrow 4n - 105 \rightarrow n$. No primeiro caso, temos

$$n = 2(4n) - 105 = 8n - 105,$$

donde $n = 15$; no segundo temos

$$n = 2(4n - 105) - 105 = 8n - 315$$

donde $n = 45$. Agora basta verificar que (15, 30, 60) e (45, 90, 75) são efetivamente trios fixos.

A título de curiosidade e/ou como exercício para o(a) leitor(a), listamos na tabela a seguir todas as k -uplas fixas, incluindo os casos $k = 2$ e $k = 3$ trabalhados nos itens (c) e (d) acima.

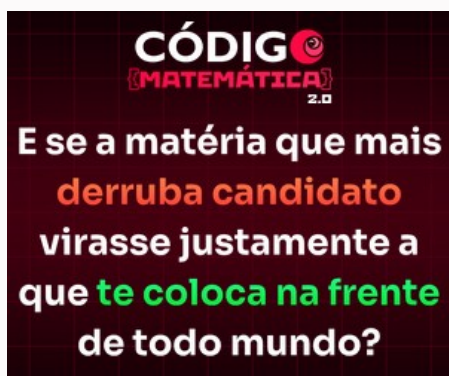
k	k -uplas fixas
2	(35, 70)
3	(15, 30, 60), (45, 90, 75)
4	(7, 14, 28, 56), (21, 42, 84, 63), (49, 98, 91, 77)
6	(5, 10, 20, 40, 80, 55), (25, 50, 100, 95, 85, 65)
12	(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 23, 46, 92, 79, 53), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 87, 69, 33, 66, 27, 54), (9, 18, 36, 72, 39, 78, 51, 102, 99, 93, 81, 57), (11, 22, 44, 88, 71, 37, 74, 43, 86, 67, 29, 58) (13, 26, 52, 104, 103, 101, 97, 89, 73, 41, 82, 59), (17, 34, 68, 31, 62, 19, 38, 76, 47, 94, 83, 61)

Observamos ainda que após 12 embaralhamentos todas as cartas voltam à posição inicial.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

