



OBMEP – Nível 2 – 2ª Fase

Soluções

QUESTÃO 1. Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

1. Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
2. Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$\begin{aligned} 203 &\xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \dots \\ 4197 &\xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83 \dots \end{aligned}$$

- A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
- B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
- C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

SOLUÇÃO:

- A) Há várias soluções, como por exemplo

$$\begin{aligned} 45 &\xrightarrow{\text{apaga}} 4 \xrightarrow{\text{dobra}} 8 \xrightarrow{\text{dobra}} 16 \xrightarrow{\text{apaga}} 1 \\ 45 &\xrightarrow{\text{dobra}} 90 \xrightarrow{\text{apaga}} 9 \xrightarrow{\text{dobra}} 18 \xrightarrow{\text{apaga}} 1. \end{aligned}$$

- B) Aqui também há várias soluções, como por exemplo

$$\begin{aligned} 345 &\xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{apaga}} 3 \xrightarrow{\text{dobra}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1 \\ 345 &\xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{dobra}} 68 \xrightarrow{\text{apaga}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1 \end{aligned}$$

- C) Aplicamos a regra “apaga” até sobrar apenas um algarismo, e temos então três casos:

1. Este algarismo é igual a 1 e a brincadeira acaba.
2. Este algarismo é 2, 3 ou 4 : neste caso aplicamos a regra “dobra” algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra “apaga” obtendo o número 1.
3. Este algarismos é 5, 6, 7, 8 ou 9: neste caso aplica-se a regra “dobra” uma vez, obtendo respectivamente 10, 12, 14, 16 ou 18; então aplica-se a regra “apaga” para obter o número 1.

QUESTÃO 2. A caminhonete do Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

- A) Você acha possível que Beremiz faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?
- B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

SOLUÇÃO:

A) Beremiz tem que transportar uma carga total de $150 \times 60 + 100 \times 25 = 9000 + 2500 = 11500$ quilos. Como a carga máxima da caminhonete é 2000 quilos, em cinco viagens Tio Barnabé poderá transportar no máximo $5 \times 2000 = 10000$ quilos, faltando ainda $11500 - 10000 = 1500$ quilos para completar o serviço. Logo, não é possível fazer o serviço em apenas 5 viagens.

B) Solução 1: Beremiz pode fazer 5 viagens carregando, em cada uma, 30 sacas de arroz e 8 de milho, totalizando $30 \times 60 + 8 \times 25 = 1800 + 200 = 2000$ quilos. Em cinco viagens, ele levaria $30 \times 5 = 150$ sacas de arroz e $5 \times 8 = 40$ sacas de milho, restando $100 - 40 = 60$ sacas de milho, pesando $60 \times 25 = 1500$ quilos, que poderiam ser todas transportadas na sexta viagem.

Solução 2: Beremiz pode fazer 5 viagens levando, em cada uma, 28 sacos de arroz e 12 de milho, totalizando $28 \times 60 + 12 \times 25 = 1980$ quilos em cada viagem; na sexta viagem ele pode levar os 10 sacos de arroz e os 40 de milho restantes, totalizando $10 \times 60 + 12 \times 25 = 1600$ quilos.

QUESTÃO 3. Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?

B) Quantos botões há na caixinha?

Solução:

A) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.

B) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é $3 \times 2 \times 3 = 18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18 - (3 + 2) = 13$. Outra solução equivalente (mais longa e trabalhosa) é fazer uma tabela listando todos os tipos possíveis de botões e depois excluir os pequenos redondos e os grandes pretos.

QUESTÃO 4. O quadrado $ABCD$ da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado $EFGH$.

A) A área do quadrado $EFGH$ corresponde a que fração da área do quadrado $ABCD$?

B) Se o quadrado $ABCD$ tem 80 cm^2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

SOLUÇÃO:

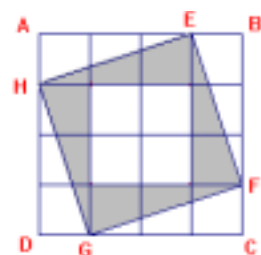
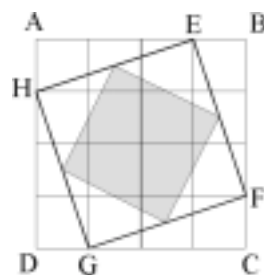
A) Solução 1: A figura ao lado mostra que o quadrado $EFGH$ é formado por quatro triângulos iguais (AEH , EFB , FGC e GHD) e quatro quadradinhos. Cada um dos triângulos tem área igual à metade da área de três quadradinhos. Logo, a área do quadrado $EFGH$ é igual à área de $4 + 4 \times \frac{3}{2} = 4 + 6 = 10$ quadradinhos. Como a área do quadrado $ABCD$ é igual à área de 16 quadradinhos, a fração pedida é

$$\frac{\text{área do quadrado } EFGH}{\text{área do quadrado } ABCD} = \frac{\text{área de 10 quadradinhos}}{\text{área de 16 quadradinhos}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

A área (em quadradinhos) do quadrado $EFGH$ também pode ser calculada subtraindo-se da área do quadrado $ABCD$ a área dos quatro triângulos externos ao quadrado $EFGH$. Cada um destes triângulos tem área igual à área de $\frac{3}{2}$ quadradinhos, donde a área do quadrado $EFGH$ é igual à área de $16 - 4 \times \frac{3}{2} = 16 - 6 = 10$ quadradinhos.

Solução 2: Se um quadrado tem lado de medida L (em alguma unidade de comprimento) então sua área é L^2 (a unidade de área é o quadrado da unidade de comprimento). Deste modo, para calcular a área do quadrado $EFGH$, basta calcular HE^2 , o que fazemos a seguir

Seja k o lado de um dos quadradinhos. O teorema de Pitágoras mostra que



$$HE^2 = AH^2 + AE^2 = k^2 + (3k)^2 = 10k^2$$

e já achamos a área do quadrado $EFGH$. Como a área do quadrado $ABCD$ é $16k^2$, segue que a fração pedida é

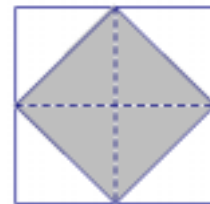
$$\frac{10k^2}{16k^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

B) Notamos primeiro que o quadrado sombreado tem metade da área do quadrado $EFGH$. Isto fica claro na figura ao lado, onde vemos que o quadrado $EFGH$ pode ser decomposto em oito triângulos iguais, quatro dos quais formam o quadrado sombreado.

Usando o resultado do item (A), vemos que a área do quadrado $EFGH$ é

$$\frac{5}{8} \times 80 = 50 \text{ cm}^2, \text{ e segue que a área do quadrado sombreado é igual a } \frac{1}{2} \times 50 = 25 \text{ cm}^2.$$

Como $25 = 5^2$ segue que o lado do quadrado sombreado mede 5 cm.



QUESTÃO 5. Em uma festa o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%.

- A)** Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?
B) Quantos homens e quantas mulheres haviam na festa depois da chegada dos casais?

SOLUÇÃO:

A) Seja m o número de mulheres e h o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos $m = 4h$. Deste modo, a fração de homens antes da chegada dos cinco casais era

$$\frac{\text{número de homens antes da chegada dos cinco casais}}{\text{número de pessoas antes da chegada dos cinco casais}} = \frac{h}{m+h} = \frac{h}{4h+h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5}.$$

Como $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, vemos que o percentual de homens na festa antes da chegada dos cinco casais era 20%.

B) Após a chegada dos 5 casais, o número de homens passou a ser $h+5$ e o de mulheres $m+5$. A fração de homens na festa passou a ser então

$$\frac{h+5}{(m+5)+(h+5)} = \frac{h+5}{4h+5+h+5} = \frac{h+5}{5h+10}$$

Como a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%, temos a equação

$$\frac{h+5}{5h+10} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$$

donde

$$50(h+5) = 13(5h+10)$$

$$15h = 120$$

$$h = 8$$

Como $m = 4h$ segue que $m = 32$; logo haviam $h+5 = 13$ homens e $m+5 = 37$ mulheres na festa depois da chegada dos cinco casais..

QUESTÃO 6. A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros cada um.

- a)** Qual era a área da folha antes de ser cortada?
b) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
c) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Solução:

A) A área da folha era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056 \text{ cm}^2$$

B) Sejam a e b as dimensões da folha, onde supomos $a \leq b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab = 1056$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados em que a folha foi cortada são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida.

Como a e b são divisores de 1056, a fatora  o em fatores primos $1056 = 2^5 \times 3 \times 11$ nos mostra que a e b são da forma $2^x \times 3^y \times 11^z$, onde x, y e z são inteiros tais que $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Lembrando que $ab = 1056$ e que a e b são maiores que 18, obtemos os seguintes possibilidades:

a	b
$2 \times 11 = 22$	$2^4 \times 3 = 48$
$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 11 = 44$
$2^5 = 32$	$3 \times 11 = 33$

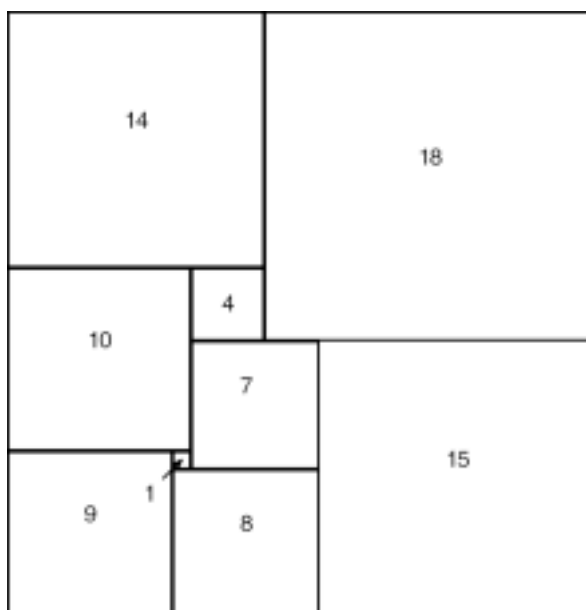
Temos agora que decidir quais destas possibilidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que    menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento b da folha. Isto quer dizer que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que (i) não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões e (ii) não há parcelas comuns às duas expressões.

Este argumento mostra que $2b \leq 1 + 4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 14 + 15 + 18$, ou seja, $2b \leq 86$. Logo $b \leq 43$ e a única possibilidade    $b = 33$. Segue que as dimensões da folha eram $a = 32$ e $b = 33$.

Existem outras maneiras de eliminar os pares (22,48) e (24,44), usando o argumento acima e mostrando, por exemplo, que não existem duas maneiras de escrever 22 e 24 como soma dos lados dos quadrados de duas maneiras com parcelas distintas e sem parcelas comuns.

Esta soluço depende do fato de que, em qualquer decomposi  o de um retângulo em quadrados, os lados dos quadrados são necessariamente paralelos a um dos lados do retângulo. Um argumento intuitivo para demonstrar este fato consiste em selecionar um v  rtice do retângulo e observar que o quadrado ao qual este v  rtice pertence tem seus lados apoiados sobre os lados do retângulo. Qualquer quadrado que toca este primeiro quadrado (mesmo que em apenas um v  rtice) tem seus lados necessariamente paralelos aos lados do retângulo, pois caso contrário teríamos ângulos diferentes de 90° ou 180° na decomposi  o, e estes ângulos não podem ser preenchidos com quadrados.

B) A única possibilidade (a menos de rota  es e simetrias)    mostrada abaixo:



Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

