

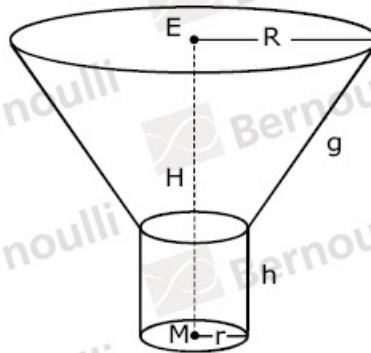
BERNOULLI COLÉGIO E PRÉ-VESTIBULAR



http://www.colegiobernoulli.com.br/bernoulli_resolve/

Matemática – Questão 01

Um funil é formado por um tronco de cone e um cilindro circular retos, como representado na figura a seguir. Sabe-se que $g = 8$ cm, $R = 5$ cm, $r = 1$ cm e $h = 4\sqrt{3}$ cm.



Considerando essas informações,

1. **CALCULE** o volume do tronco de cone, ou seja, do corpo do funil.
2. **CALCULE** o volume **total** do funil.
3. Suponha que o funil, inicialmente vazio, começa a receber água a 127 ml/s. Sabendo que a vazão do funil é de 42 ml/s, **CALCULE** quantos segundos são necessários para que o funil fique cheio.

RESOLUÇÃO:

1. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned} R - r &= 4 \\ H - h &= h_T \\ g &= 8 \end{aligned}$$

$$8^2 = 4^2 + h_T^2$$

$$h_T = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Logo, o volume do tronco de cone é dado por:

$$V_T = \frac{\pi h_T}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{\pi \cdot 4\sqrt{3}}{3} (5^2 + 5 \cdot 1 + 1^2) = \frac{124\sqrt{3} \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

2. O volume total do funil é a soma do volume do tronco de cone com o volume do cilindro circular.

Logo:

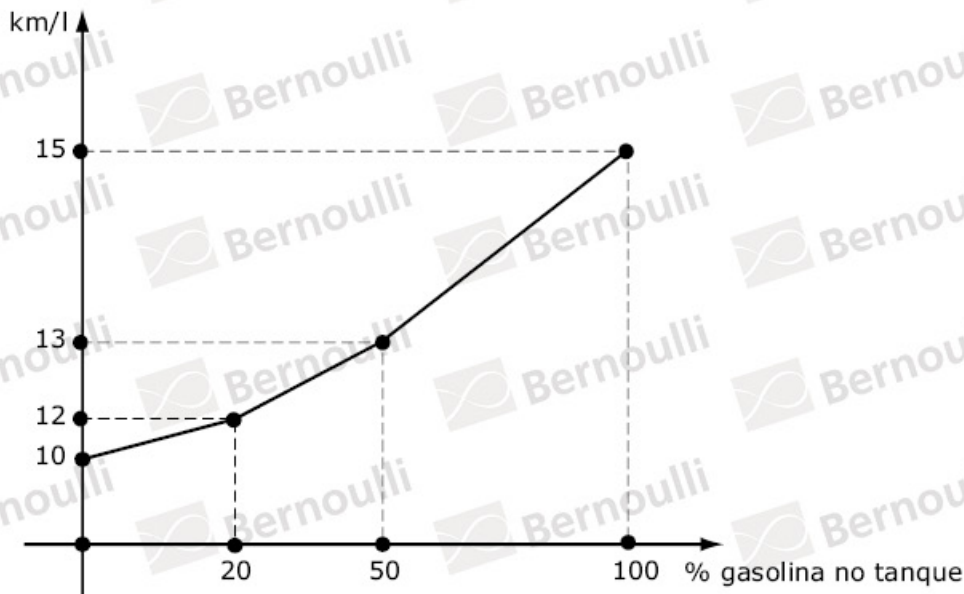
$$V_F = \frac{124\sqrt{3} \pi}{3} + \pi \cdot 1^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{136\sqrt{3} \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

3. Temos que:
$$\begin{cases} \frac{136\sqrt{3} \pi}{3} \text{ cm}^3 = \frac{136\sqrt{3} \pi}{3} \text{ ml} \\ 127 - 42 = 85 \text{ ml/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{136\sqrt{3} \pi}{3} \div 85 = \frac{8\sqrt{3} \pi}{15} \text{ s}$$

Matemática – Questão 02

Elenice possui um carro *flex*, isto é, que funciona com uma mistura de gasolina e etanol no tanque em qualquer proporção. O tanque desse veículo comporta 50 l e o rendimento médio dele pode ser auferido no gráfico abaixo, formado por segmentos de reta.



Nesse gráfico, estão indicados,

- no eixo horizontal, a proporção de gasolina presente no tanque; e,
- no eixo vertical, o rendimento do carro, em km/l.

Elenice vai fazer uma viagem, de ida e volta, nesse carro, da cidade **A** para a cidade **B**, que distam, uma da outra, 600 km.

1. Elenice sai de **A** com o tanque cheio apenas de gasolina.

DETERMINE quanto de gasolina ainda vai restar no tanque, quando ela chegar a **B**.

2. Ao chegar na cidade **B**, Elenice completa o tanque do carro com etanol. Na volta para **A**, a 300 km de **B**, ela resolve parar e completar o tanque, novamente com etanol. **DETERMINE** quanto de etanol ela precisou colocar no tanque nessa parada.

3. **DETERMINE** quanto ainda restava de combustível no tanque, quando Elenice chegou a **A**, na volta.

RESOLUÇÃO:

1. Temos que: $600 \div 15 = 40 \ell$ utilizados

$$\Rightarrow 50 - 40 = \boxed{10 \ell \text{ restantes}}$$

2. Temos que: $\begin{cases} 10 \ell \text{ G} \\ 40 \ell \text{ E} \end{cases} \Rightarrow 20\% \text{ G} \Rightarrow 12 \text{ km} / \ell$

$$\text{Logo: } 300 \div 12 = 25 \ell \Rightarrow 50 - 25 = \boxed{25 \ell \text{ etanol}}$$

3. Antes de completar o tanque com 25 ℓ de etanol pela 2ª vez, ainda restavam 25 ℓ de combustível assim distribuídos:

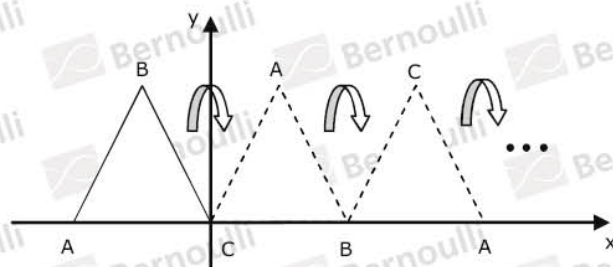
$$\begin{cases} 5 \ell \text{ G} \\ 20 \ell \text{ E} \end{cases} \xrightarrow{+25 \ell \text{ E}} \begin{cases} 5 \ell \text{ G} \\ 45 \ell \text{ E} \end{cases} \Rightarrow 10\% \text{ G} \Rightarrow 11 \text{ km} / \ell$$

$$\text{Logo: } 300 \div 11 = 27,27 \ell \Rightarrow 50 - 27,27 = \boxed{22,73 \ell \text{ de combustível restantes.}}$$

Matemática – Questão 03

Um triângulo equilátero ABC, cujo lado mede 1 cm, é colocado sobre um plano cartesiano, de modo que, inicialmente, o lado AC está apoiado sobre o eixo x e o vértice C, sobre a origem.

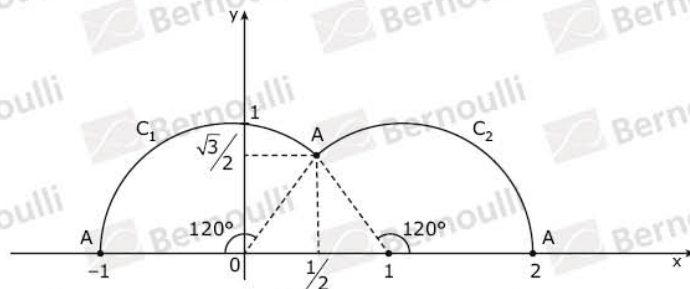
Em seguida, esse triângulo é girado, seguidamente, sobre o vértice que está à direita e apoiado sobre o eixo x, como mostrado nesta figura:



1. **DETERMINE** uma equação que descreve a trajetória do ponto A, da sua posição inicial até ele tocar novamente, pela primeira vez, o eixo x.
2. **DETERMINE** o comprimento da trajetória percorrida pelo ponto A, da sua posição inicial até ele tocar novamente, pela primeira vez, o eixo x.
3. **DETERMINE** as coordenadas de todos os pontos da trajetória do ponto A que estão a uma altura $\frac{1}{2}$ do eixo x.

RESOLUÇÃO:

1. Temos 2 arcos de circunferência, como nesta figura:



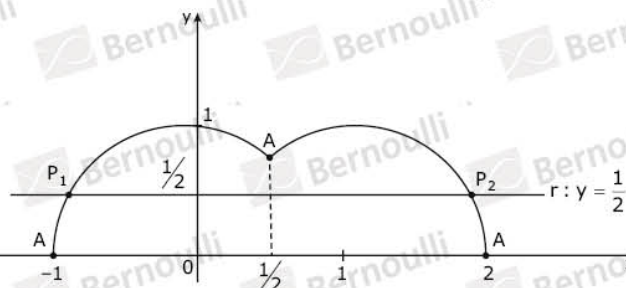
Logo, temos que:

$$\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 = 1; -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, y \geq 0 \\ C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1; \frac{1}{2} < x \leq 2, y \geq 0 \end{cases}$$

2. O comprimento total da trajetória é:

$$C_T = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{4\pi}{3}$$

3. Fazendo a interseção dos arcos da circunferência com a reta $r: y = \frac{1}{2}$, temos que:



$$C_1 \cap r = \{P_1\}$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P_{1n}\left(3n - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ com } n \geq 0.$$

$$C_2 \cap r = \{P_2\}$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \xrightarrow{x > 1} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P_{2n}\left(3n + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ com } n \geq 0.$$

Matemática – Questão 04

Pretende-se diluir 800 ml de ácido contidos em um recipiente.

Para tanto, inicialmente, substituem-se a ml do ácido por a ml de água. Essa nova solução é homogeneizada e, com ela, repete-se o mesmo procedimento, usando-se o mesmo volume a . Esse procedimento é repetido certo número de vezes, até se conseguir a diluição desejada.

1. Considerando que o procedimento é repetido **cinco** vezes e que, na solução final obtida, restam 25 ml de ácido, **DETERMINE** a quantidade da solução a que foi substituída por água em cada uma das cinco etapas.
2. Considerando essa solução com 25 ml de ácido, **DETERMINE** quanto se deve substituir dela por água pura, para se obter uma nova solução com 20 ml de ácido.

RESOLUÇÃO:

1. Como após cada substituição a solução é sempre homogeneizada, então a fração de ácido retirada em cada procedimento será $\frac{a}{800}$ e, logicamente, a fração do ácido que permanece será $1 - \frac{a}{800}$. Após n procedimentos, restará na solução um volume de ácido dado por:

$$V = 800 \cdot \left(1 - \frac{a}{800}\right)^n$$

Para 5 substituições, restaram 25 mL de ácido:

$$25 = 800 \cdot \left(1 - \frac{a}{800}\right)^5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(1 - \frac{a}{800}\right)^5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{a}{800}$$

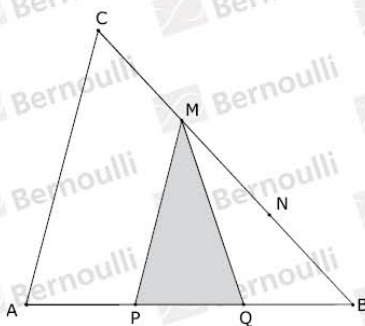
$$\Rightarrow \boxed{a = 400 \text{ ml}}$$

2. Como de 25 ml de ácido queremos retirar 5 ml, para calcularmos quanto devemos retirar da solução total de 800 ml, basta resolvermos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 25 & \text{---} & 5 \\ 800 & \text{---} & x \end{array} \Rightarrow x = \boxed{160 \text{ ml}}$$

Matemática – Questão 05

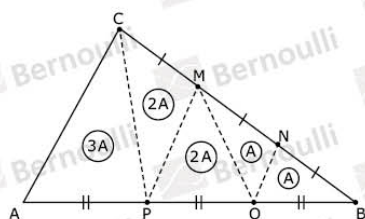
Na figura a seguir, o triângulo ABC tem área igual a 126. Os pontos P e Q dividem o segmento AB em três partes iguais, assim como os pontos M e N dividem o segmento BC em três partes iguais.



Com base nessas informações,

1. **DETERMINE** a área do triângulo QBN.
2. **DETERMINE** a área do triângulo sombreado PQM.

1ª RESOLUÇÃO:



1. QN é mediana do $\triangle MQB$:
 $S_{\triangle MQN} = S_{\triangle QNB} = A$

$$\begin{cases} \text{MQ é mediana do } \triangle PMB: \\ S_{\triangle PMQ} = S_{\triangle MQB} = 2A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{PM é ceviana do } \triangle CPB \text{ com } \overline{BM} = 2 \cdot (\overline{MC}): \\ S_{\triangle PMB} = 2 \cdot (S_{\triangle PMC}) = 4A \Rightarrow S_{\triangle PMC} = 2A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{PC é ceviana do } \triangle ABC \text{ com } \overline{PB} = 2 \cdot (\overline{AP}): \\ S_{\triangle PBC} = 2 \cdot (S_{\triangle APC}) = 6A \Rightarrow S_{\triangle APC} = 3A \end{cases}$$

$$S_{\triangle ABC} = 9A \Rightarrow 126 = 9A \Rightarrow A = 14 = S_{\triangle QNB}$$

$$2. S_{\triangle PMQ} = 2A \Rightarrow S_{\triangle PMQ} = 28$$

2ª RESOLUÇÃO:

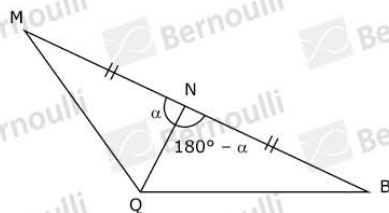
1. Como os triângulos QBN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{1}{3}$, temos que:

$$\frac{S_{\triangle QBN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle QBN} = \frac{1}{9} \cdot 126 = 14$$

2. Notemos que os triângulos MNQ e QNB têm a mesma área, pois:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{MN \cdot NQ \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{NB \cdot NQ \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2}$$



Logo, temos que:

$$S_{\triangle MNQ} = 14$$

Novamente, pela semelhança dos triângulos PBM e ABC, temos que:

$$S_{\triangle PBM} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 126 = 56$$

Portanto, concluímos que:

$$S_{\triangle PQM} = 56 - 14 - 14 = 28$$

Matemática – Questão 06

Em um *reality show*, um grupo de 15 participantes é dividido em dois grupos: um de 8 e outro de 7 pessoas. Durante a primeira semana do jogo, as 8 pessoas do primeiro grupo são alojadas numa casa de luxo e as 7 do segundo, num pequeno e desconfortável barracão.

Finda a primeira semana, dois novos grupos são formados para a semana seguinte.

A formação desses novos grupos faz-se desta maneira: cada um dos 15 participantes retira uma bola de uma urna que contém 15 bolas: 8 brancas e 7 vermelhas. Os participantes que retirarem bolas brancas vão para a casa de luxo e os que retirarem bolas vermelhas, para o barracão.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** a probabilidade de, após a formação dos novos grupos, Zuzu, participante do programa, habitar a casa de luxo.
2. **DETERMINE** a probabilidade de os dois novos grupos formados serem constituídos pelos mesmos participantes da etapa anterior, isto é, os 8 que estavam na casa continuarem nela, e os outros mesmos 7 permanecerem no barracão.
3. **DETERMINE** a probabilidade de, na nova formação, todos os 7 participantes que estavam no barracão irem para a casa.

1ª RESOLUÇÃO:

1. A probabilidade de Zuzu habitar a casa de luxo é a probabilidade de Zuzu retirar uma bola branca inicialmente:

$$P = \frac{8}{15}$$

2. Notemos que, se os 8 participantes que estavam na casa de luxo continuarem nela, automaticamente os 7 outros participantes permanecerão no barracão. Logo, temos que:

$$P = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \times \frac{(7!)}{(7!)} \\ = \frac{8!7!}{15!}$$

3. Distribuindo, na casa de luxo, os 7 participantes que estavam no barracão, temos que:

$$P = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \times \frac{(8!)}{(8!)} \\ = \frac{(8!)^2}{15!}$$

2ª RESOLUÇÃO:

$$1. P = \frac{\text{Nº de casos "favoráveis"}}{\text{Nº total de casos}} \Rightarrow P = \frac{8}{15}$$

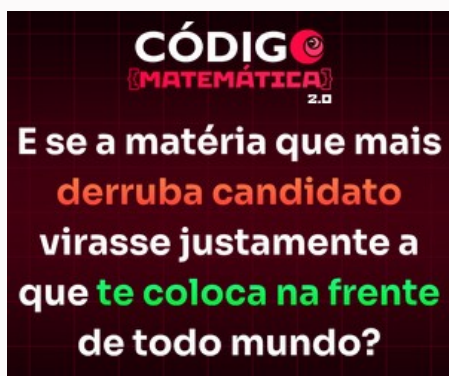
$$2. P = \frac{C_{8,8}}{C_{15,8}} = \frac{1}{\frac{15!}{8!7!}} = \frac{8!7!}{15!}$$

$$3. P = \frac{C_{8,7}}{C_{15,8}} = \frac{8}{\frac{15!}{8!7!}} = \frac{(8!)^2}{15!}$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

