

Prova de Matemática

Vestibular 2ª Fase
Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

1) O polinômio $p(x) = 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ foi dividido por um polinômio $d(x)$ e obteve-se, por quociente, o polinômio $q(x) = x^2 + 3$ e, por resto, um polinômio $r(x)$. Sabe-se que $r(-1) = 0$ e $r(1) = 2$.

a) Determine os graus dos polinômios $d(x)$ e $r(x)$.

Solução:

Designaremos por $gr(f)$ o grau de um polinômio $f(x)$. Assim, $gr(p) = 4$ e $gr(q) = 2$.

Pelo algoritmo da divisão tem-se que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, com $gr(r) < gr(d)$ ou $r(x) = 0$.

Daí, segue que:

$$gr(p) = gr(d) \cdot gr(q) \Rightarrow 4 = gr(d) \cdot 2 \Rightarrow gr(d) = 2$$

Como $r(1) = 2$, fica descartada a possibilidade de se ter $r(x) = 0$ e, portanto tem-se, obrigatoriamente, $gr(r) < gr(d) = 2$.

Agora, como $r(1) \neq r(-1)$, o polinômio $r(x)$ não é constante e, portanto,

$$gr(r) = 1.$$

b) Determine os polinômios $d(x)$ e $r(x)$.

Solução:

Sabemos, por (a), que $r(x) = ax + b$. Então:

$$r(-1) = a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \quad (1)$$

$$r(1) = a(1) + b = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (2)$$

Somando membro a membro as equações (1) e (2), obtemos $b = 1$ e, conseqüentemente, $a = 1$.

Com isso tem-se $r(x) = x + 1$.

Agora, como $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, para se obter o polinômio $d(x)$, basta dividir o polinômio $p(x) - r(x)$ por $q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x & x^2 + 3 \\ \hline -2x^4 & 2x^2 + x \\ \hline & x^3 + 3x \\ & -x^3 - 3x \\ \hline & 0 \end{array}$$

Portanto, $d(x) = 2x^2 + x$.

2) Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se $f(x_0) = x_0$.

a) Verifique se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ possui ponto fixo e, em caso afirmativo, determine seu(s) ponto(s) fixo(s).

Solução:

Seja x_0 um ponto fixo da função f dada. Então

$$f(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 6 = x_0 \Rightarrow x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0.$$

O conjunto solução da última equação é $\{2, 3\}$.

Portanto a função f dada possui dois pontos fixos: 2 e 3.

b) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da forma $g(x) = ax + b$. Determine a e b para que g admita dois pontos fixos x_1 e x_2 distintos.

Solução:

Sejam x_1 e x_2 pontos fixos distintos da função g . Então

$$g(x_1) = ax_1 + b = x_1 \Rightarrow (a - 1)x_1 + b = 0 \quad (1)$$

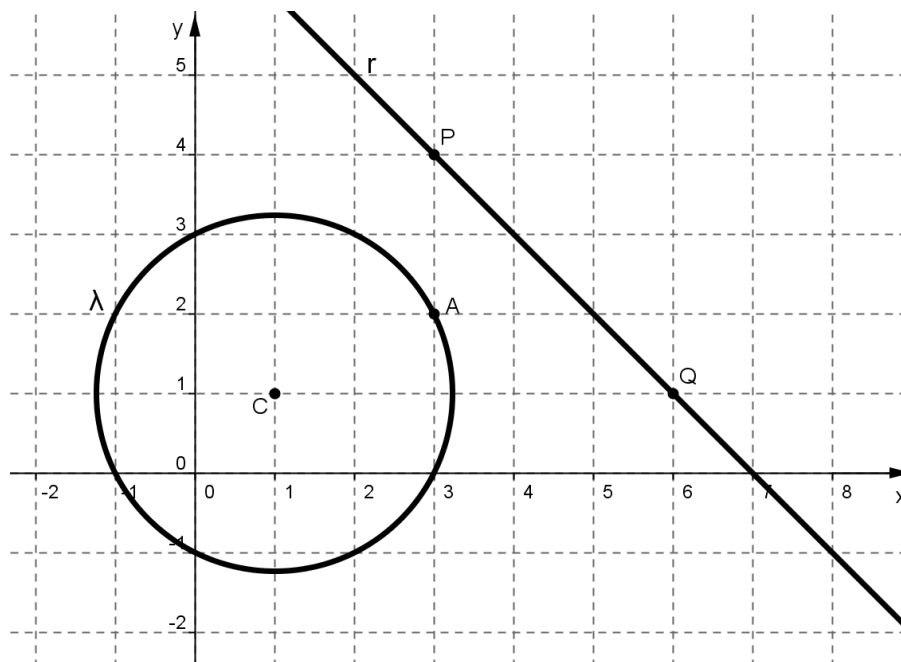
$$g(x_2) = ax_2 + b = x_2 \Rightarrow (a - 1)x_2 + b = 0 \quad (2)$$

Fazendo (2) - (1) obtém-se: $(a - 1)(x_2 - x_1) = 0$.

Como $x_1 \neq x_2$ segue da última igualdade que $a = 1$.

Substituindo o valor de a , encontrado acima, em (1) ou (2) encontra-se $b = 0$.

3) Considere a reta r determinada pelos pontos P e Q e a circunferência λ , de centro C, que passa pelo ponto A, conforme representados no plano cartesiano abaixo.



Determine a equação da reta s , perpendicular à reta r , tangente à circunferência λ e que contém pontos do 2º quadrante.

Solução:

Inicialmente calcula-se o coeficiente angular da reta r : $m_r = \frac{1-4}{6-3} = -\frac{3}{3} = -1$.

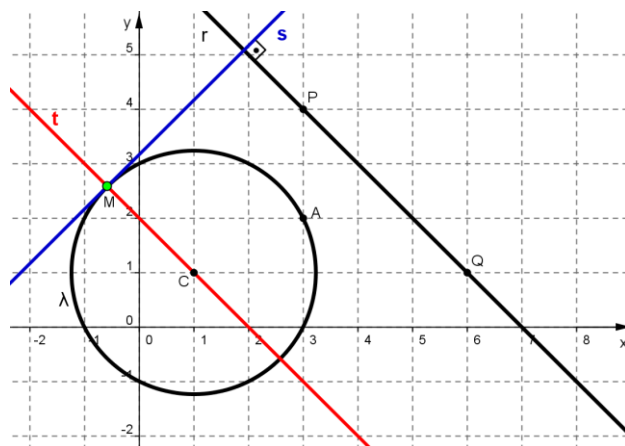
Como s é perpendicular a r , tem-se que, o coeficiente angular da reta s é:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

Seja t a reta que passa por C e pelo ponto de tangência M entre a reta s e a circunferência λ . Então t é paralela à reta r , $m_t = -1$ e, consequentemente, a equação de t é dada por:

$$t: y - 1 = -1(x - 1)$$

$$t: y = 2 - x$$



A equação da circunferência λ é dada por:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = R^2 \text{ onde } R = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} \text{ é o raio de } \lambda.$$

Portanto, a equação de λ é dada por: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

Como $M = \lambda \cap t$, a abscissa do ponto M pode ser encontrada substituindo-se $y = 2 - x$ na equação de λ . Obtém-se então:

$$(x-1)^2 + (2-x-1)^2 = 5 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 5 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x-1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Como M é um ponto do 2º quadrante, sua abscissa é negativa, donde: $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Daí, $y = 2 - \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \Rightarrow y = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ é a ordenada de M .

Portanto, a equação de s será dada por:

$$s: y - \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 1 \left[x - \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \right]$$

$$s: y = x + \sqrt{10}$$

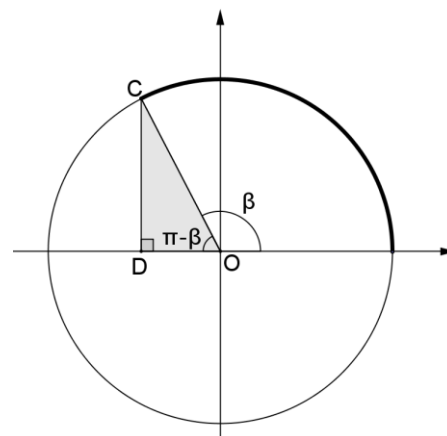
4) Nessa questão trataremos do processo de redução ao 1º quadrante das funções trigonométricas de um arco $\beta \in [0, 2\pi]$. Se um arco β tem extremidade C no 2º quadrante, podemos obter um arco α , com extremidade no 1º quadrante, tal que $\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$. Para isso, consideremos o triângulo OCD, retângulo em D, representado no círculo trigonométrico abaixo. Note que, nesse triângulo, $OC = 1$ e o ângulo agudo $\widehat{COD} = \pi - \beta$. Tomando $\alpha = \pi - \beta$ e utilizando as razões trigonométricas em um triângulo retângulo obtemos:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \beta) = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD \text{ e}$$

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} = OD.$$

Por outro lado, $\text{sen}\beta = CD$ e $\cos\beta = -OD$.

Portanto, $\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$.



Considere um arco β com extremidade no 3º quadrante como ilustrado no círculo trigonométrico abaixo. Procedendo como acima, escolha adequadamente um arco α , com extremidade no 1º quadrante, e obtenha $\text{sen}\beta$ e $\cos\beta$ em função de $\text{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, respectivamente.

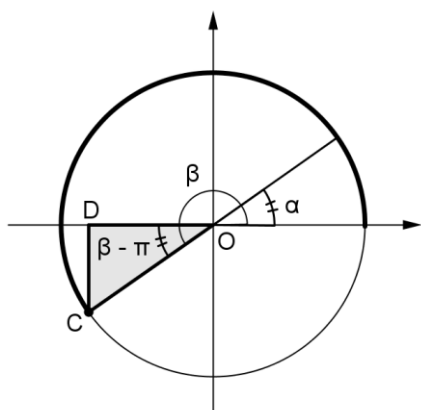
Solução:

Considere o triângulo OCD, retângulo em D, na figura ao lado. Note que, nesse triângulo, $OC = 1$ e o ângulo agudo $\widehat{COD} = \beta - \pi$. Escolhendo $\alpha = \beta - \pi$, do triângulo OCD tem-se que:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}(\beta - \pi) = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD \Rightarrow CD = \text{sen}\alpha$$

$$\text{e } \cos\alpha = \cos(\beta - \pi) = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} = OD \Rightarrow OD = \cos\alpha.$$

Por outro lado, $\text{sen}\beta = -CD$ e $\cos\beta = -OD$. Portanto, $\text{sen}\beta = -\text{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$.



5) Sejam a e b números reais positivos que satisfazem simultaneamente as duas equações abaixo:

$$2\log_2 a + 4\log_2 b = 5$$

$$\log_4 a - \log_4 b = -3$$

Calcule o valor de a^3b^3 e expresse o resultado na forma de uma fração irredutível.

Solução:

$$2\log_2 a + 4\log_2 b = 5 \Rightarrow \log_2 a^2 + \log_2 b^4 = 5 \Rightarrow \log_2 a^2 b^4 = 5 \Rightarrow a^2 b^4 = 2^5 \quad (1)$$

$$\log_4 a - \log_4 b = -3 \Rightarrow \log_4 \frac{a}{b} = -3 \Rightarrow \frac{a}{b} = 4^{-3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2^6} \quad (2)$$

Multiplicando, membro a membro, as equações (1) e (2) obtém-se:

$$(a^2 b^4) \times \left(\frac{a}{b} \right) = 2^5 \times \frac{1}{2^6}.$$

Portanto, $a^3 b^3 = \frac{1}{2}$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

