



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Pró-Reitoria de Graduação - Prograd

Serviço de Seleção, Orientação e Avaliação - SSOA

Vestibular 2009 — 2ª fase
Gabarito — Matemática

Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Se x minutos é o tempo que a impressora A trabalhou, então B trabalhou $x - 10$ minutos.

Se A tivesse trabalhado $x - 10$ minutos imprimiria 180 cópias, logo, A imprime $\frac{180}{x-10}$ cópias/minuto.

Se B tivesse trabalhado x minutos imprimiria 320 cópias, logo, B imprime $\frac{320}{x}$ cópias/minuto.

$$\text{Assim, } \frac{180}{x-10}x + \frac{320}{x}(x-10) = 480.$$

Resolvendo essa equação, tem-se

$$\frac{180}{x-10}x + \frac{320}{x}(x-10) = 480 \Leftrightarrow \frac{180x^2 + 320(x-10)^2}{x(x-10)} = 480 \Leftrightarrow x^2 - 80x + 1600 = 0 \Leftrightarrow (x-40)^2 = 0.$$

Consequentemente $x = 40$.

Logo, a impressora A trabalhou 40 minutos e imprimiu $\frac{180}{x-10}x = \frac{180}{30}40 = 240$ cópias e a impressora B trabalhou 30 minutos e imprimiu $480 - 240 = 240$ cópias.

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

Se o gráfico de g é obtido do gráfico de f através de uma translação de uma unidade, na direção do eixo Ox , para a esquerda, seguida de uma translação de duas unidades, na direção do eixo Oy , para cima, então $g(x) = 2 + f(x+1) = 2 + \log_2(x+1)$.

Se o gráfico de h é simétrico ao gráfico de g em relação ao eixo Oy , então $h(x) = 2 + \log_2(1-x)$

Cálculo da inversa de h :

$$y = 2 + \log_2(1-x) \Leftrightarrow y - 2 = \log_2(1-x) \Leftrightarrow 1-x = 2^{y-2} \Leftrightarrow x = 1 - 2^{y-2}$$

$$\text{Assim, } h^{-1}(x) = 1 - 2^{x-2}$$

$$h^{-1}(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2^{x-2} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{x-2} < 2^{-1} \Rightarrow x-2 < -1 \Rightarrow x < 1$$

A solução é, portanto, o intervalo $]-\infty, 1[$

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

Se o período de f é igual a π , então $\frac{2\pi}{m} = \pi$ e, portanto $m = 2$.

Usando-se a relação $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, obtém-se que $\sec^2 \alpha = 5$ o que acarreta $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Usando-se as condições $f(0) = 2$ e $f(\frac{\pi}{4}) = -1$ obtém-se $\begin{cases} A + B \cos \alpha = 2 \\ A - B \sin \alpha = -1 \end{cases}$ que é equivalente a

$$\begin{cases} A + \frac{B\sqrt{5}}{5} = 2 \\ A - \frac{2B\sqrt{5}}{5} = -1 \end{cases}.$$

Resolvendo-se o sistema encontra-se $A = 1$ e $B = \sqrt{5}$

Dessa forma, tem-se $f(x) = 1 + \sqrt{5} \cos(2x + \alpha)$.

$$\text{Assim, } f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \sqrt{5} \cos(2\alpha) = 1 + \sqrt{5}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 + \sqrt{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & k-1 & 4 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dividindo a 1ª linha por 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & k-1 & 4 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{subtraindo a 2ª linha da 1ª multiplicada por 3} \\ \text{Subtraindo a 3ª linha da 1ª} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

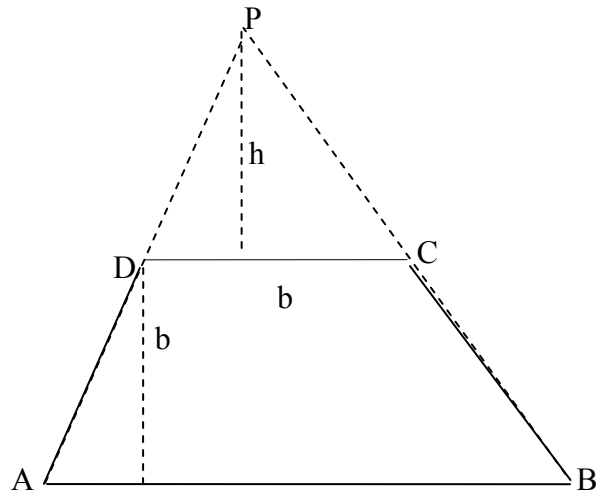
$$\xrightarrow{\text{Subtraindo a 3ª linha da 2ª multiplicada por } k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(k-1)(k+2) & 1-(k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$$

A matriz final $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$ é a matriz ampliada de um sistema equivalente ao sistema original.

Analisando-se a última linha da matriz B tem-se

- se $k^2 + k - 6 \neq 0$, ou seja, $k \neq 2$ e $k \neq -3$, o sistema é possível e determinado.
- Se $k^2 + k - 6 = 0$, ou seja, $k = 2$ ou $k = -3$, tem-se duas possibilidades
 - i) Para $k = 2$ o sistema é possível e indeterminado, uma vez que a última linha de B será toda igual a 0.
 - ii) Para $k = -3$ o sistema será impossível, uma vez que a última linha de B corresponde à equação $0 = 5$.

Questão 05 (Valor: 20 pontos)



Na figura, considere c a medida do lado AB

Sendo A_1 a área do triângulo ABP , tem-se que $A_1 = \frac{c(h+b)}{2}$

Sendo A_2 a área do trapézio $ABCD$, tem-se que $A_2 = \frac{(c+b)b}{2}$

Logo, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{c(h+b)}{(c+b)b}$.

Usando a semelhança entre os triângulos DCP e ABP obtém-se

$$\frac{h}{h+b} = \frac{b}{c} \quad \text{e, portanto,} \quad c = \frac{b(h+b)}{h}.$$

Da razão $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$ obtém-se $\frac{b+h}{b} = \frac{5}{2}$ (1) e $\frac{b+h}{h} = \frac{5}{3}$ (2).

Portanto, $c = \frac{b(h+b)}{h} = \frac{5}{3}b$ (3)

Substituindo-se (1), (2) e (3) na expressão de $\frac{A_1}{A_2}$ obtém-se

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c(h+b)}{(c+b)b} = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{h+b}{b} = \frac{\frac{5}{3}b}{\frac{5}{3}b+b} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{16}$$

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

A curva E, satisfaz à propriedade de uma elipse com centro na origem; eixo maior sobre o eixo Ox; focos nos pontos $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2(\sqrt{3}, 0)$ e distância entre os vértices igual a 4.

Uma equação dessa elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sendo $a = 2$ (distância dos vértices à origem) e $c = \sqrt{3}$ (distância dos focos à origem).

Sabendo-se que a, b e c satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$, obtém-se $b = 1$ e a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Uma parábola C com vértice na interseção de E com o eixo OY positivo, que é o ponto (0, 1), e que passa por $F_2(\sqrt{3}, 0)$ tem para equação $y - 1 = ax^2$ (I)

Substituindo-se F_2 em (I) obtém-se $a = -\frac{1}{3}$

Logo, uma equação de C é $y = -\frac{x^2}{3} + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3 - 3y$

Para encontrar as intersecções de E e C,

substitui-se $x^2 = 3 - 3y$ na equação de E e obtém-se

$$3 - 3y + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -\frac{1}{4}$$

Para $y = 1$, tem-se $x = 0$ o que corresponde ao ponto (0, 1) que é o vértice da parábola.

Para $y = -\frac{1}{4}$, obtém-se $x = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ que corresponde aos pontos $(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4})$.

Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Salvador, 14 de dezembro de 2008

Nelson Almeida e Silva Filho
Diretor do SSOA/UFBA

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

