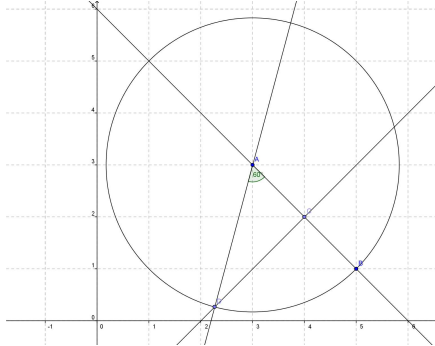


UFJF - CONCURSO VESTIBULAR 2011-2

Resolução das questões discursivas de Matemática

Questão 1:

Considere o esboço ao lado



- a) Seja λ a circunferência de centro no ponto A e que contém o ponto B . O raio de λ é dado por
- $$r = \sqrt{(5-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}.$$

Assim, a equação da circunferência λ é dada por

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8.$$

- b) Seja C o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Então as coordenadas de C são:

$$\left(\frac{5+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (4, 2).$$

O coeficiente angular m_1 da reta r que passa por A e B é dado por

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{5-3} = -1.$$

Seja s a reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e é perpendicular ao mesmo segmento. Então o coeficiente angular m_2 da reta s é dado por:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = 1.$$

Assim, a equação da reta s é $y = x + b$, para algum $b \in \mathbb{R}$.

Substituindo o ponto $C(4, 2)$ nessa equação, obtemos: $2 = 4 + b \Rightarrow b = -2$.

Portanto,

$$s : y = x - 2.$$

- c) Fixando a extremidade em A e rotacionando a haste no sentido horário em 60° , sejam x, y as coordenadas da posição final da extremidade inicialmente em B . Chamemos $D(x, y)$ o ponto correspondente a essas coordenadas.

Temos que $AB = AD$. Então D pertence à circunferência λ . Além disso, no triângulo ABD , como o ângulo $\hat{A}$ é igual a 60° , temos também que, os ângulos de vértices B e D tem medida 60° e daí o triângulo ABD é equilátero. Então, a mediana relativa à base $\overline{AB}$ coincide com a altura, e como a reta s é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, concluímos que $D \in s$.

]Assim, o ponto D é um dos pontos de intersecção entre a reta s e a circunferência λ , que obtemos resolvendo o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} y = x - 2 & (I) \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 8 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), encontramos: $(x - 3)^2 + (x - 5)^2 = 8$, ou seja, $x^2 - 8x + 13 = 0$.

Resolvendo essa equação do segundo grau obtemos: $\Delta = 12$,

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}.$$

Graficamente, podemos **descartar** a possibilidade de $x = 4 + \sqrt{3}$.

Para encontrar a coordenada y , substituímos $x = 4 - \sqrt{3}$ na equação (I), obtendo $y = 2 - \sqrt{3}$. Daí, $x = 4 - \sqrt{3}$ e $y = 2 - \sqrt{3}$ são as coordenadas da posição final da extremidade, inicialmente, em B.

Questão 2:

a) Seja, por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$.

Note que: se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Inicialmente note que $g(a) = [f(a) - f(a)](a - a) = 0$.

Estudaremos a função g , quando $x \neq a$, isto é quando $x > a$ ou $x < a$. Como f é uma função estritamente crescente, temos:

- Se $x < a$ então $f(x) < f(a)$. Logo $x - a < 0$ e $f(x) - f(a) < 0$, logo

$$g(x) = [f(x) - f(a)](x - a) > 0 \Rightarrow g(x) > g(a).$$

- Se $x > a$ então $f(x) > f(a)$. Logo $x - a > 0$ e $f(x) - f(a) > 0$, logo

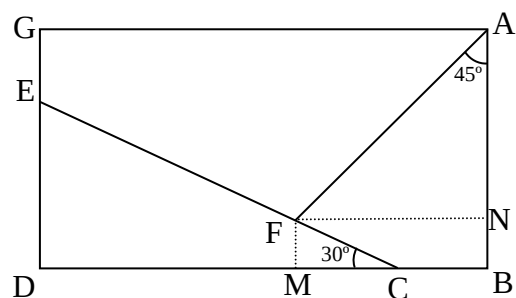
$$g(x) = [f(x) - f(a)](x - a) > 0 \Rightarrow g(x) > g(a).$$

Portanto, concluímos que, $\forall x \neq a$, $g(x) > g(a)$.

Questão 3:

Na figura ao lado, considere M e N os pés das perpendiculares do ponto nos segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{BA}$, respectivamente.

No triângulo retângulo CMF , obtemos:



$$(I) \quad \sin(30^\circ) = \frac{FM}{FC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow FM = \frac{FC}{2}$$

$$(II) \quad \cos(30^\circ) = \frac{CM}{FC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CM}{FC} \Rightarrow CM = FC \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Note que $NF = BC + CM = 1 + CM$ e $AN = AB - NB = 3 - FM$. Então, no triângulo retângulo ANF , obtemos

$$(III) \quad \operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{1 + CM}{3 - FM} \Rightarrow 1 = \frac{1 + CM}{3 - FM} \Rightarrow CM + FM = 2$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$\frac{1}{2}FC + \frac{\sqrt{3}}{2}FC = 2 \Rightarrow (1 + \sqrt{3})FC = 4.$$

Portanto,

$$FC = \frac{4}{1 + \sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1).$$

Questão 4:

Defina as notações:

$$\left. \begin{array}{l} M_a = \text{quantidade do aço utilizado} \\ M_m = \text{quantidade da madeira utilizada} \end{array} \right\} \Rightarrow M_a + M_m = 32 \quad (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_a = \text{Custo de 1Kg de aço} \\ C_m = \text{Custo de 1Kg de madeira} \end{array} \right\} \Rightarrow C_a = \frac{1}{3}C_m \quad (II)$$

Como na confecção desse objeto, foi gasto o mesmo valor na compra de cada material, de (II) temos:

$$M_a C_a = M_m C_m \Rightarrow M_a \left(\frac{1}{3} C_m \right) = M_m C_m \Rightarrow \frac{1}{3} M_a = M_m. \quad (III)$$

Substituindo (III) em (I), obtemos:

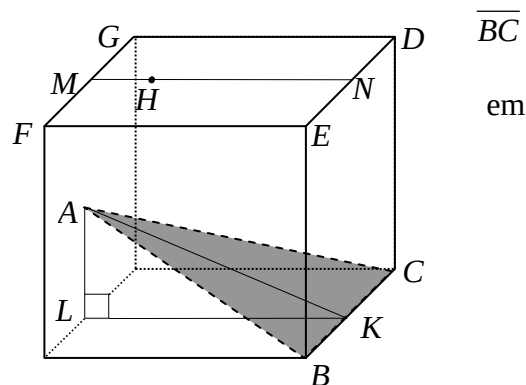
$$M_a + \frac{1}{3} M_a = 32 \Rightarrow M_a = 24.$$

Então, a quantidade do aço utilizado nesta confecção foi 24kg.

Questão 5:

Na figura ao lado, considere K o ponto médio da aresta e L o ponto médio da aresta oposta.

Note que $AL = 1$, $LK = 2$ e o triângulo ALK é retângulo L .



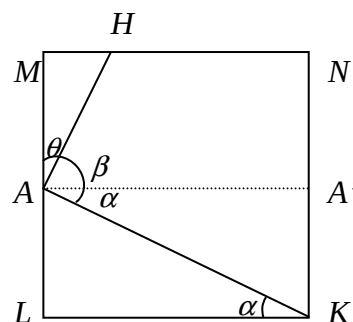
- a) Pelo teorema de Pitágoras,

$$(AK)^2 = (AL)^2 + (LK)^2 = 1 + 4 \Rightarrow AK = \sqrt{5}.$$

A área do triângulo ABC é dada por

$$S(ABC) = \frac{1}{2}(BC \cdot AK) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ cm}.$$

- b) É fácil ver que $\overline{MN}$ e $\overline{LK}$ são paralelos. Considere a secção do plano, que passa pelos pontos M , N e K , com o cubo acima. Seja A' o ponto médio do segmento $\overline{KN}$.



Chamemos $\widehat{LKA} = \alpha$, $\widehat{A'AH} = \beta$ e $\widehat{HAM} = \theta$, como na figura. Como $\overline{AA'}$ é paralelo a $\overline{LK}$, temos que $\widehat{KAA'} = \widehat{LKA} = \alpha$, pois são ângulos alternos internos.

Como, por hipótese, $\overline{AH}$ é a altura da pirâmide $HABC$ de base triangular ABC , então $\overline{AH}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AK}$.

$$\text{Logo: } \alpha + \beta = 90^\circ = \theta + \beta \Rightarrow \alpha = \theta.$$

Então, $\widehat{LKA} = \widehat{HAM}$ e $\widehat{ALK} = \widehat{HMA} = 90^\circ$ e daí $AMH \sim KLA$.

Por essa semelhança:

$$\frac{KL}{AM} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{5}}{AH} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

O volume V da pirâmide $HABC$ é dado por

$$V = \frac{1}{3} AH \cdot (\text{área da base}) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{5} = \frac{5}{6} \text{ cm}^3.$$

$$V = \frac{5}{6} \text{ cm}^3.$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

