

QUESTÃO 1

ALTERNATIVA B

A quantidade de água que Daniela gastava por semana (isto é, em 7 dias) em cada atividade era:

- lavar roupa: $7 \times 150 = 1050$ litros;
- banho de 15 minutos: $7 \times 90 = 630$ litros;
- lavar o carro com mangueira: $1 \times 100 = 100$ litros.

Assim, ela gastava $1050 + 630 + 100 = 1780$ litros por semana. Com a economia, Daniela passou a gastar semanalmente em cada atividade:

- lavar roupa no tanque: $3 \times 150 = 450$ litros;
- banho de 5 minutos: $7 \times \frac{90}{3} = 7 \times 30 = 210$ litros;
- lavar o carro com balde: $1 \times 10 = 10$ litros,

ou seja, um total de $450 + 210 + 10 = 670$ litros. Portanto, ela passou a economizar por semana $1780 - 670 = 1110$ litros de água.

Podemos também pensar diretamente na economia semanal da Daniela:

- 4 lavagens de roupa: $4 \times 150 = 600$ litros;
- $\frac{2}{3}$ banho por dia: $7 \times \frac{2}{3} \times 90 = 420$ litros;
- substituir a mangueira pelo balde: $100 - 10 = 90$,

o que nos dá o total de $600 + 420 + 90 = 1110$ litros.

QUESTÃO 2

ALTERNATIVA C

Seja x o comprimento do pé do Maurício. Então $39 < \frac{5x+28}{4} \leq 40$, e segue que $156 < 5x+28 \leq 160$. Logo $128 < 5x \leq 132$, ou seja, $25,6 < x \leq 26,4$. A única alternativa que satisfaz estas desigualdades é a alternativa C.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA A

Escrevendo 24 como produto de inteiros positivos de todas as maneiras possíveis, podemos investigar todas as possibilidades para a e b em $a * b = (a+1) \times (b-1) = 24$ e testá-las em $b * a = (b+1) \times (a-1) = 30$ para achar os possíveis valores de a e b . Vamos lá:

$24 =$	a	b	$(b+1) \times (a-1)$
1×24	0	25	não considerar pois $a > 0$
2×12	1	13	0
3×8	2	9	10
4×6	3	7	16
6×4	5	5	25
8×3	7	4	30
12×2	11	3	33
24×1	23	2	46

Logo $a = 7$ e $b = 4$, donde $a + b = 11$.

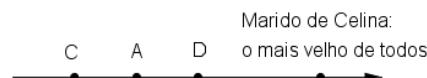
De modo mais algébrico, podemos resolver este problema como segue. Temos $a * b = (a+1)(b-1) = ab - a + b - 1 = 24$ e $b * a = (b+1)(a-1) = ab + a - b - 1 = 30$. Somando estas duas expressões, obtemos $2ab - 2 = 54$ e segue que $ab = 28$. De modo análogo ao anterior, geramos as possibilidades (1,28), (2,14), (4,7), (7,4), (14,2) e (28,1) para (a,b) e verificamos que apenas $a = 7$ e $b = 4$ satisfazem $a * b = 24$ e $b * a = 30$.

Alternativamente, notamos que subtraindo $ab - a + b - 1 = 24$ de $ab + a - b - 1 = 30$ obtemos $2a - 2b = 6$, ou seja, $a - b = 3$. Logo $a = b + 3$ e, substituindo em $ab = 28$ temos $b^2 - 3b - 28 = 0$. Esta equação tem raízes $b = 4$ e $b = -7$; como só nos interessa a raiz positiva, temos $b = 4$ e então $a = 7$.

QUESTÃO 4

ALTERNATIVA C

Na figura ao lado, A representa a idade de Arnaldo, C a de Celina e D a de Dalila; a flecha indica o sentido de idade crescente. A ordem das letras C, A e D indica que Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. Logo o esposo de Celina é Beto, que é também o mais velho de todos.



QUESTÃO 5

ALTERNATIVA D

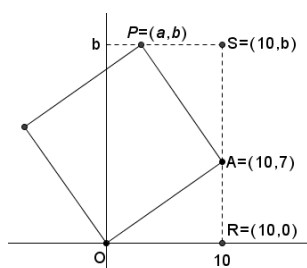
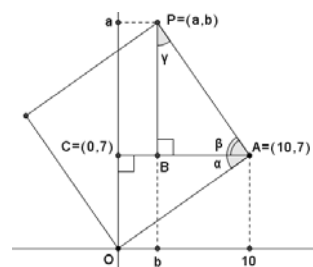
A área de uma circunferência é proporcional ao quadrado do diâmetro. Como uma pizza grande tem diâmetro duas vezes maior que o de uma pequena, se a área de uma pizza pequena é A então a área de uma grande é $4A$. Três fatias de uma pizza grande têm área $\frac{3}{16} \times 4A = \frac{3}{4}A$, ou seja, correspondem a $\frac{3}{4}$ de uma pizza pequena.

Pode-se também resolver esta questão usando a fórmula da área de uma circunferência. Seja r o raio da pizza pequena; então sua área é πr^2 . O raio da pizza grande é $2r$ e sua área é $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$. Três fatias da pizza grande têm área $\frac{3}{16}(4\pi r^2) = \frac{3}{4}\pi r^2$, ou seja, $\frac{3}{4}$ da área de uma pizza pequena.

QUESTÃO 6

ALTERNATIVA A

Sejam O a origem, A o ponto $(10,7)$ e P o ponto (a,b) . Traçando por A uma paralela ao eixo x e por P uma paralela ao eixo y , determinamos os pontos B e C como na figura. Como $A = (10,7)$, temos $AC = 10$ e $OC = 3$; além disso, $OA = AP$. Denotamos por α , β e γ as medidas dos ângulos destacados. Observamos agora que, como o ângulo $\widehat{OAP}$ é reto, temos $\alpha + \beta = 90^\circ$. Por outro lado, como o



triângulo ABP é retângulo em B , temos $\beta + \gamma = 90^\circ$. Segue que $\alpha = \gamma$ e então os triângulos OAC e ABP são congruentes, pois são triângulos retângulos com um ângulo (além do ângulo reto) comum e hipotenusas OA e AP iguais. Concluímos que $AB = 7$ e $BP = 10$, donde $a = 7 + 10 = 17$ e $b = 10 - 7 = 3$; logo $a + b = 3 + 17 = 20$.

Outra solução usa a figura à esquerda. Os triângulos ORA e ASP são congruentes, por argumentos semelhantes aos da primeira solução; segue que $AS = OR = 10$ e $PS = AR = 7$. Logo $a = 3$ e $b = 17$, donde $a + b = 20$.

QUESTÃO 7

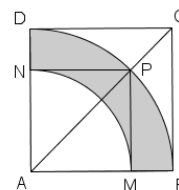
ALTERNATIVA C

Notamos que $5353 = 53 \times 101$ e $2828 = 28 \times 101$. Podemos então fazer a conta rapidamente, usando a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$\begin{aligned} 5353^2 - 2828^2 &= 53^2 \times 101^2 + 28^2 \times 101^2 = (53^2 - 28^2) \times 101^2 = (53 - 28) \times (53 + 28) \times 101^2 \\ &= 5^2 \times 9^2 \times 101^2 = 45^2 \times 101^2 = (45 \times 101)^2 = 4545^2. \end{aligned}$$

QUESTÃO 8 ALTERNATIVA E

Seja ℓ o lado do quadrado $ABCD$. Como $\widehat{BD}$ é um arco de circunferência com centro A , segue que AP é um raio da circunferência, e portanto $AP = AB = \ell$. Por outro lado, AP é a diagonal do quadrado $AMPN$; o teorema de Pitágoras nos diz então que $\ell^2 = AM^2 + MP^2$. Como $AM = MP$, segue que $\ell^2 = 2AM^2$, donde $AM^2 = \frac{\ell^2}{2}$. A área sombreada é então



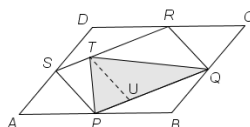
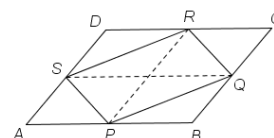
$$\frac{1}{4}\pi AB^2 - \frac{1}{4}\pi AM^2 = \frac{1}{4}\left(\pi \ell^2 - \pi \frac{\ell^2}{2}\right) = \frac{1}{8}\pi \ell^2$$

e a razão entre esta área e a área do quadrado é

$$\frac{\frac{1}{8}\pi \ell^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{8}.$$

QUESTÃO 9 ALTERNATIVA A

Por um momento, esqueçamos o triângulo PQT e traçamos os segmentos PR e QS , como na figura ao lado. É imediato que todos os triângulos que aparecem são congruentes; segue que $PQRS$ é um paralelogramo e sua área é metade da área de $ABCD$, ou seja, 20 cm^2 .



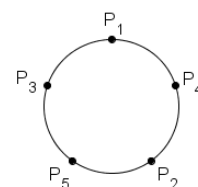
Voltamos agora para a figura do enunciado e traçamos uma paralela TU ao segmento PS . Os triângulos PST e UTP são congruentes, bem como os triângulos UTQ e RQT . Como o triângulo PQT é a união dos triângulos UTP e UTQ , segue que sua área é metade da área do quadrilátero $PQRS$, ou seja, 10 cm^2 .

QUESTÃO 10 ALTERNATIVA D

Vamos denotar o comprimento da circunferência por ℓ , e chamar a formiguinha mais rápida de formiguinha A e a outra de formiguinha B; suas velocidades serão denotadas por v_A e

v_B , respectivamente. Como A dá 9 voltas enquanto B dá 6, temos $\frac{v_A}{v_B} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$; isto mostra

que se A anda uma distância d_A enquanto B anda uma distância d_B , então $\frac{d_A}{d_B} = \frac{3}{2}$.



Como as formiguinhas andam em sentidos contrários, elas vão se encontrar uma primeira vez em um ponto que chamaremos P_1 . Sejam d_A e d_B as distâncias percorridas pelas formiguinhas até que elas se encontrem novamente. Então $d_A + d_B = \ell$ e $\frac{d_A}{d_B} = \frac{3}{2}$. A segunda expressão nos dá $d_A = \frac{3}{2}d_B$; substituindo na

primeira temos $d_B + \frac{3}{2}d_B = \frac{5}{2}d_B = \ell$, donde $d_B = \frac{2}{5}\ell$.

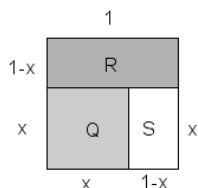
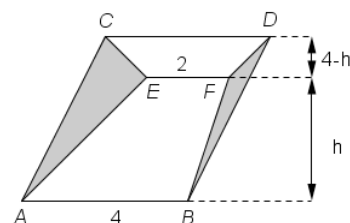
Isto quer dizer que B vai encontrar A, a partir do ponto P_1 , cada vez que percorrer uma distância de $\frac{2}{5}\ell$.

Podemos agora desenhar os pontos em que elas se encontram; além de P_1 , eles são (em ordem) P_2 , P_3 , P_4 e P_5 , como na figura (estes pontos são vértices de um pentágono regular inscrito na circunferência). Notamos que após o encontro em P_5 as formiguinhas se encontram novamente em P_1 , ou seja, não há mais outros pontos de encontro.

QUESTÃO 11

ALTERNATIVA B

Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo $ABCD$ e subtrair as áreas dos trapézios $ABFE$ e $CDFE$. Seja h a altura do trapézio $ABFE$; sua área é então $\frac{AB+EF}{2}h = 3h \text{ cm}^2$. Como a altura do paralelogramo $ABCD$ é 4 cm, a altura do trapézio $CDFE$ é $4-h$ e sua área é $\frac{CD+EF}{2}(4-h) = 12-3h \text{ cm}^2$. A área do paralelogramo $ABCD$ é 16 cm^2 ; a soma das áreas dos triângulos é então $16 - (3h + 12 - 3h) = 4 \text{ cm}^2$.



QUESTÃO 12

ALTERNATIVA A

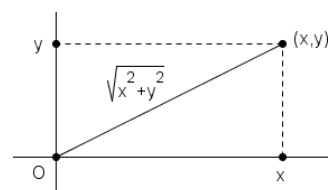
Seja x o lado do quadrado. A área de R é então $1 \times (1-x) = 1-x$, a área de Q é x^2 e a área de S é $x(1-x) = x - x^2$. Como as áreas de R e Q são iguais, temos $x^2 = 1-x$. A raiz positiva desta equação é $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e logo a área de S é

$$x - x^2 = x - (1-x) = 2x - 1 = 2 \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 = \sqrt{5} - 2 \text{ m}^2.$$

QUESTÃO 13

ALTERNATIVA C

Coloquemos a origem de coordenadas no ponto O . O teorema de Pitágoras mostra que a distância de um ponto (x,y) à origem de coordenadas é $\sqrt{x^2 + y^2}$; logo, para que (x,y) esteja na região delimitada pelas circunferências de raios 4 e 5, devemos ter $16 = 4^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5^2 = 25$. Observamos também que se (x,y) está nesta região, o mesmo se pode dizer todos os pontos da forma $(\pm x, \pm y)$ e $(\pm y, \pm x)$. Assim, podemos restringir nossa análise a pontos (x,y) com $x, y \geq 0$ e $x \leq y$.



Como $16 \leq x^2 + y^2 \leq 25$, devemos ter $0 \leq x, y \leq 5$, e estamos interessados apenas em valores inteiros de x e y . Procedemos agora por listagem direta, e obtemos a tabela a seguir.

pontos (x,y) com $x,y \geq 0$, $x \leq y$ e $16 \leq x^2 + y^2 \leq 25$	pontos da forma $(\pm x, \pm y)$ e $(\pm y, \pm x)$	número de pontos
(0,4)	$(0, \pm 4), (\pm 4, 0)$	4
(0,5)	$(0, \pm 5), (\pm 5, 0)$	4
(1,4)	$(\pm 1, \pm 4), (\pm 4, \pm 1)$	8
(2,4)	$(\pm 2, \pm 4), (\pm 4, \pm 2)$	8
(3,3)	$(\pm 3, \pm 3)$	4
(3,4)	$(\pm 3, \pm 4), (\pm 4, \pm 3)$	8
	Total	36

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA C

Vamos denotar as hipotenusas dos triângulos retângulos que aparecem na figura por a, b, x, d e c , como na figura; nosso objetivo é achar $x = AD$.

Os seis triângulos retângulos são semelhantes, pois têm em comum o ângulo de vértice A. Logo

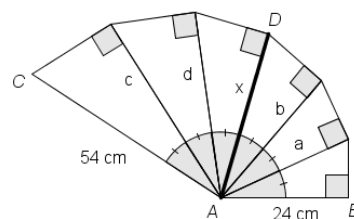
$$\frac{24}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{x} = \frac{x}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{54}$$

Multiplicando os três primeiros termos acima e, separadamente, os três

últimos, obtemos $\frac{24}{x} = \frac{x}{54}$. Logo $x^2 = 24 \times 54 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3^3 = 2^4 \times 3^4 = 4^2 \times 9^2 = 36^2$, donde $x = 36$ cm.

Alternativamente, seja $\lambda = \frac{24}{a}$. Multiplicando os seis termos da sequência de igualdades acima, obtemos

$\lambda^6 = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, donde $\lambda^3 = \frac{2}{3}$. Por outro lado, $\lambda^3 = \frac{24}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{x} = \frac{24}{x}$ e obtemos $\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$, donde $x = 36$ cm.



QUESTÃO 15
ALTERNATIVA D

Vamos denotar por P e V canetas pretas e vermelhas, respectivamente. Como o número de P e V que Juliana tem são iguais, as probabilidades de ela escolher uma P ou uma V ao acaso são ambas iguais a $\frac{1}{2}$. Podemos então fazer a seguinte tabela:

caneta colocada na bolsa ao acaso	probabilidade	canetas na bolsa no dia seguinte	probabilidade de tirar uma P
P	$\frac{1}{2}$	P, P	1
V	$\frac{1}{2}$	V, P	$\frac{1}{2}$

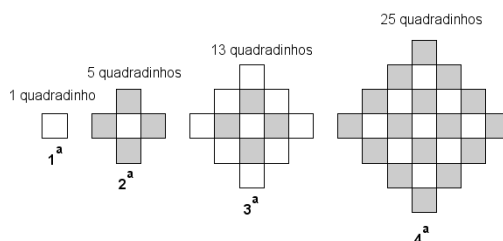
Como os eventos (P,P) e (P,V) são disjuntos, a probabilidade de Juliana tirar uma caneta preta da bolsa é

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA D

Vamos contar quantos quadradinhos brancos e sombreados aparecem em cada figura.

figura	brancos	sombreados	total
1ª	$1 = 1^2$	$0 = 0^2$	$1^2 + 0^2$
2ª	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$2^2 + 1^2$
3ª	$9 = 3^2$	$4 = 2^2$	$3^2 + 2^2$
4ª	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$4^2 + 3^2$



Em geral, vemos que a n -ésima figura terá $n^2 + (n-1)^2$

quadradinhos. Nosso problema se resume então a achar o menor inteiro positivo n tal que $n^2 + (n-1)^2 \geq 2009$. Podemos fazer isto analisando o sinal do polinômio $n^2 + (n-1)^2 - 2009 = 2n^2 - 2n - 2008$, mas é mais rápido proceder por aproximações, como segue.

Como $n^2 > (n-1)^2$ para $n \geq 1$, devemos ter $2n^2 > 2009$, ou seja, $n^2 > 1005$; segue que $n > 31$. Como $32^2 + 31^2 = 1985$, o valor $n = 32$ está descartado; por outro lado, para $n = 33$ temos $33^2 + 32^2 = 2113$.

QUESTÃO 17 ALTERNATIVA E

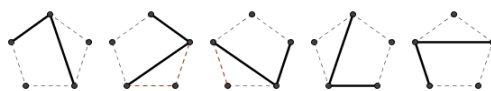
O pentágono tem 5 lados e 5 diagonais, num total de 10 segmentos. Uma figura consiste de 2 destes segmentos, e escolhas distintas de dois segmentos correspondem a figuras distintas. Segue que o número de figuras distintas

$$\text{é } \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Outra maneira de resolver esta questão é listar, organizadamente, as figuras possíveis. Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.



Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.

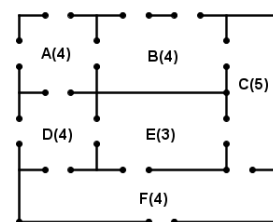


Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

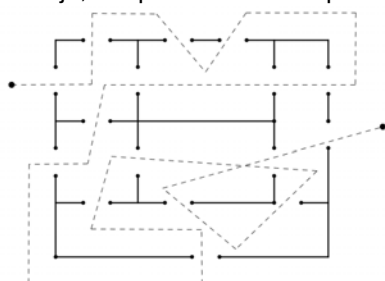
QUESTÃO 18 ALTERNATIVA B

Na figura marcamos, ao lado das letras que identificam as salas, o número de portas de cada uma.

Vamos supor que a porta pela qual o Joãozinho passou duas vezes pertence a uma sala com 4 portas. Então ele passou uma única vez pelas 3 portas restantes, ou seja, ele passou 5 vezes pelas portas desta sala. Logo ele *entrou, saiu, entrou, saiu e entrou* na sala, ou seja, ficou dentro dela. Esta conclusão é contrária ao enunciado, que diz que ele foi embora. Logo o Joãozinho passou uma única vez por todas as portas das salas com 4 portas. Assim, a porta pela qual ele passou duas vezes é aquela que não pertence a nenhuma sala com 4 portas, ou seja, é a porta que liga as salas C e E.



Coloca-se, é claro, a questão da existência de um trajeto que satisfaça as condições do enunciado. Para isto, providenciamos a figura ao lado; nela, as bolinhas marcam o início e o término do trajeto.

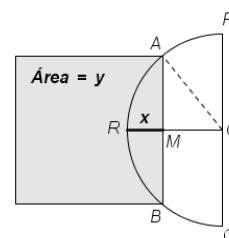


QUESTÃO 19 ALTERNATIVA C

Como o diâmetro do círculo é 2, seu raio é 1. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OMA, obtemos $AM^2 = 1^2 - (1-x)^2 = 2x - x^2$. Esta é a área de um quadrado de

lado $AM = \frac{AB}{2}$: a área do quadrado de lado AB é então $y = 4(2x - x^2) = 8x - 4x^2$.

Notamos que como x varia em OR, temos $0 \leq x \leq 1$; para $x = 0$ temos $y = 0$ e para $x = 1$ temos $y = 4$. O gráfico de $y = 8x - 4x^2$ é uma parábola com concavidade para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo; este gráfico está representado na alternativa C).



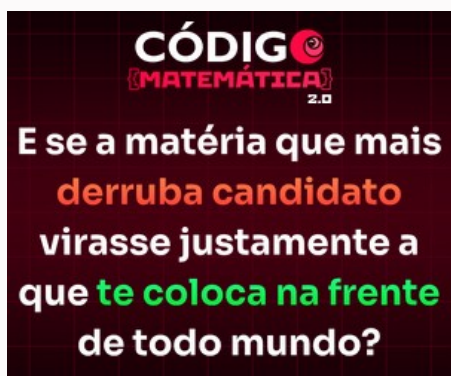
QUESTÃO 20 ALTERNATIVA E

Vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 times que foram eliminados após perder 2 partidas cada um, contamos $56 \times 2 = 112$ derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi $112 + 1 = 113$. Além disso, como não houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

