

Prova de Matemática

Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

1) Considere a circunferência C de equação $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ e a reta r de equação $x = 4$. O objetivo dessa questão é obter a equação de uma circunferência λ , tangente exterior à circunferência C , e com centro sobre a reta r .

a) Escolha um ponto que possa ser o centro da circunferência λ .

Solução:

Da equação da circunferência C obtém-se seu centro $O = (1, -2)$ e seu raio 5.

Para o centro da circunferência λ , devemos escolher um ponto sobre a reta r que seja exterior à circunferência C . Um ponto sobre a reta r é um ponto da forma $P = (4, y)$. O ponto P é exterior à circunferência C se, e somente se, a distância de P até o centro de C é maior que o seu raio. Logo, devemos escolher um ponto $P = (4, y)$ tal que:

$$d(P, O) > 5 \Leftrightarrow \sqrt{(4-1)^2 + (y-(-2))^2} > 5 \Leftrightarrow 9 + (y+2)^2 > 25$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2 > 16 \Leftrightarrow y+2 < -4 \text{ ou } y+2 > 4 \Leftrightarrow y < -6 \text{ ou } y > 2.$$

Portanto, pode-se escolher qualquer ponto $P = (4, y)$ tal que $y < -6$ ou $y > 2$. Por exemplo, $P = (4, 3)$.

b) Determine a medida do raio da circunferência λ .

Solução:

A circunferência λ é tangente exterior à circunferência C se, e somente se, a distância entre os centros é igual à soma dos raios. Sendo R o raio de λ , devemos ter:

$$d(P, O) = 5 + R \Leftrightarrow \sqrt{(4-1)^2 + (3-(-2))^2} = 5 + R \Leftrightarrow$$

$$R = -5 + \sqrt{9+25} \Leftrightarrow R = -5 + \sqrt{34}.$$

c) Encontre a equação da circunferência λ .

Solução:

A equação da circunferência λ de centro em $(4,3)$ e raio $R = -5 + \sqrt{34}$ é:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (-5 + \sqrt{34})^2.$$

2) Dois sistemas são ditos equivalentes quando eles possuem o mesmo conjunto solução.

Encontre valores de a e b para que os sistemas

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = 2 \\ bx - ay = 4 \end{cases}$$

sejam equivalentes.

Solução:

Primeiro, vamos encontrar o conjunto solução do primeiro sistema. Da primeira equação, obtemos:

$$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - 2x$$

Substituindo na segunda equação, obtemos:

$$x + 2(3 - 2x) = 5 \Leftrightarrow x - 4x = 5 - 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

E voltando na primeira equação:

$$y = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9 - 2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{7}{3}.$$

Logo, o primeiro sistema tem uma única solução, o par ordenado $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Isto é, seu

conjunto solução é o conjunto unitário $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)\right\}$.

Agora, vamos determinar a e b de modo que S seja o conjunto solução do segundo sistema.

Para que o par ordenado $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ seja solução deste sistema, devemos ter:

$$\begin{cases} a\frac{1}{3} + b\frac{7}{3} = 2 \\ b\frac{1}{3} - a\frac{7}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 7b = 6 \\ -7a + b = 12 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear nas variáveis a e b que devemos resolver. A primeira equação nos dá:

$$a + 7b = 6 \Leftrightarrow a = 6 - 7b.$$

Substituindo na segunda equação, obtemos:

$$-7(6 - 7b) + b = 12 \Leftrightarrow -42 + 49b + b = 12 \Leftrightarrow 50b = 54 \Leftrightarrow b = \frac{27}{25}.$$

E voltando na primeira equação:

$$a = 6 - 7\left(\frac{27}{25}\right) = \frac{150 - 189}{25} \Leftrightarrow a = -\frac{39}{25}.$$

Finalmente, devemos mostrar que, para estes valores de a e b , o par $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ é a única solução do segundo sistema. Substituindo $a = -\frac{39}{25}$ e $b = \frac{27}{25}$ no segundo sistema obtém-se:

$$\begin{cases} -\frac{39}{25}x + \frac{27}{25}y = 2 \\ \frac{27}{25}x - \left(-\frac{39}{25}\right)y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -39x + 27y = 50 \\ 27x + 39y = 100 \end{cases}$$

Resolvendo-se esse último sistema, conclui-se que o par $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ é a sua única solução, ou seja, o seu conjunto solução é de fato S .

Portanto, os sistemas dados são equivalentes se, e somente se, $a = -\frac{39}{25}$ e $b = \frac{27}{25}$.

3) Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita

- crescente quando: $\forall x_1, x_2 \in A, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Quantas funções $f : A \rightarrow B$ crescentes podem ser definidas?

Solução:

Para definirmos uma função $f : A \rightarrow B$ devemos associar a cada elemento de A , sem exceção, um único elemento correspondente em B . Isto é, devemos escolher $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ em B . Como $1 < 2 < 3 < 4 < 5$, para que f seja crescente devemos ter

$f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5)$. De início, isto implica que f não pode repetir imagens, isto é, elementos distintos em A devem ter imagens distintas por f . Além disso, como os elementos de B são os números inteiros de 1 a 7, escolhido $f(1)$, $f(5)$ deve ser no mínimo igual a $f(1) + 4$ e então, como $f(5)$ é no máximo igual a 7, $f(1)$ deve ser no máximo igual a 3; ou seja, as possibilidades para $f(1)$ são 1, 2 ou 3. Fazendo raciocínio análogo para os demais elementos, podemos compor a tabela de possibilidades ao lado, onde, em cada coluna, aparece as possibilidades para $f(k)$ em função da escolha de $f(k-1)$ à esquerda, sendo $k = 2, 3, 4, 5$. Nesta tabela, cada escolha de $f(5)$, juntamente com as correspondentes escolhas anteriores de $f(4), f(3), f(2)$ e $f(1)$, define uma função $f : A \rightarrow B$ crescente. Portanto, o número de funções $f : A \rightarrow B$ crescentes que podem ser definidas é igual a 21.

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$
1	2	3	4	5
				6
				7
		4	5	6
				7
				7
	3	4	5	6
				7
				7
		5	6	7
				7
				7
2	3	4	5	6
				7
		5	6	7
				7
	4	5	6	7
				7
3	4	5	6	7
Total de possibilidades				21

b) Escolhendo aleatoriamente uma das funções $f : A \rightarrow B$ crescentes que podem ser definidas, qual é a probabilidade de se ter $f(5) = 6$?

Solução:

Na tabela das possibilidades para $f : A \rightarrow B$ crescentes apresentada acima, podemos contar na coluna de $f(5)$ quantas vezes aparece o número 6, encontrando 5 possibilidades. Portanto, a probabilidade de se ter $f(5) = 6$ é igual a:

$$\frac{\#\{f : A \rightarrow B \mid f \text{ é crescente e } f(5) = 6\}}{\#\{f : A \rightarrow B \mid f \text{ é crescente}\}} = \frac{5}{21}.$$

c) Escolhendo aleatoriamente uma das funções $f: A \rightarrow B$ crescentes que podem ser definidas, qual é a probabilidade de se ter $f(5) = 4$?

Solução:

Como devemos ter $f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5)$ então, dado $f(1)$ em B , $f(5)$ deve ser no mínimo igual a $f(1) + 4$. Como $f(1)$ é no mínimo 1, então $f(5)$ é no mínimo igual a $1+4=5$. Portanto, a probabilidade de se ter $f(5) = 4$ é igual a zero.

4) Determine números reais A , B e C para os quais vale a identidade:

$$6x^2 + 14x - 20 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solução:

A identidade acima relaciona dois polinômios de grau 2 na variável real x . Efetuando os produtos e agrupando os termos de mesmo grau do lado direito desta igualdade, obtemos:

$$6x^2 + 14x - 20 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2) \Leftrightarrow$$

$$6x^2 + 14x - 20 = A(x^2 - 4) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + 2x) \Leftrightarrow$$

$$6x^2 + 14x - 20 = (A + B + C)x^2 + (-2B + 2C)x - 4A$$

Da condição para identidade de polinômios, a igualdade acima é equivalente a:

$$\begin{cases} A + B + C = 6 \\ -2B + 2C = 14 \\ -4A = -20 \end{cases}$$

Para resolvermos este sistema, partimos da terceira equação que fornece:

$$-4A = -20 \Leftrightarrow A = 5.$$

Substituindo na primeira equação, obtemos:

$$5 + B + C = 6 \Leftrightarrow B = 1 - C$$

e daí, na segunda equação:

$$-2(1 - C) + 2C = 14 \Leftrightarrow 4C = 16 \Leftrightarrow C = 4.$$

Voltando na equação anterior, obtemos: $B = 1 - 4 \Leftrightarrow B = -3$.

Portanto, a identidade dada é válida se, e somente se, $A = 5, B = -3$ e $C = 4$.

Outra solução:

Como a identidade dada deve ser válida para todo x real, então, em particular:

$$x = 0 \Rightarrow 6(0)^2 + 14 \cdot 0 - 20 = A(0+2)(0-2) + B \cdot 0 \cdot (0-2) + C \cdot 0 \cdot (0+2) \Rightarrow$$

$$-20 = -4A \Rightarrow A = 5;$$

$$x = -2 \Rightarrow 6 \cdot (-2)^2 + 14 \cdot (-2) - 20 = A(-2+2)(-2-2) + B \cdot (-2) \cdot (-2-2) + C \cdot (-2) \cdot (-2+2) \Rightarrow \\ -24 = 8B \Rightarrow B = -3;$$

$$x = 2 \Rightarrow 6 \cdot (2)^2 + 14 \cdot 2 - 20 = A(2+2)(2-2) + B \cdot 2 \cdot (2-2) + C \cdot 2 \cdot (2+2) \Rightarrow 32 = 8C \Rightarrow C = 4.$$

Portanto, a identidade é válida somente se $A = 5, B = -3$ e $C = 4$.

Resta saber se, para os valores de A, B e C encontrados, a igualdade permanece válida para todo valor real de x , uma vez que A, B e C foram obtidos atribuindo-se a x três valores particulares.

De fato, se dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ de grau 2 coincidem em três valores distintos de x então $p(x) = q(x)$ pois, caso contrário, a diferença $p(x) - q(x)$ seria um polinômio não nulo de grau no máximo 2 com três raízes, o que contraria o Teorema Fundamental da Álgebra.

5) Um certo programa de computador usa coordenadas cartesianas, com origem no canto inferior esquerdo, para representar os pontos na tela de vídeo. Neste sistema de coordenadas, este programa é capaz de desenhar somente segmentos de reta verticais ou com coeficiente angular

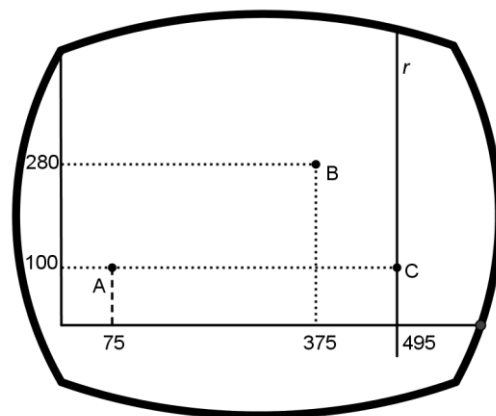
m pertencente ao conjunto $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, 2, 3, 4\right\}$

Considere os pontos $A(75, 100)$, $B(375, 280)$,

$C(495, 100)$ e a reta vertical r que passa pelo ponto C .

A partir do ponto A , deseja-se desenhar um segmento de reta que intersecte a reta r num ponto D de modo que o ponto B fique no interior do triângulo ACD .

a) Determine o valor mínimo para o coeficiente angular desse segmento de reta $\overline{AD}$ a ser desenhado com esse programa.



Solução: O coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$ é:

$$m_{AB} = \frac{280 - 100}{375 - 75} = \frac{180}{300} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}.$$

Para que B fique no interior do triângulo ACD a inclinação do segmento $\overline{AD}$ deve ser maior que a do segmento $\overline{AB}$ e então devemos ter $m_{AD} > m_{AB}$. Notemos que o conjunto

$\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, 2, 3, 4\right\}$ dos possíveis coeficientes angulares de segmentos que podem ser

desenhados está apresentado em ordem crescente. Como $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, o menor valor possível para

o coeficiente angular do segmento $\overline{AD}$ é $m_{AD} = \frac{2}{3}$.

b) Considerando o coeficiente angular determinado no item (a), encontre as coordenadas do ponto D .

Solução: A equação da reta que passa pelo ponto $A = (75, 100)$ com coeficiente angular $m_{AD} = \frac{2}{3}$ é:

$$y - 100 = \frac{2}{3}(x - 75) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 50$$

O ponto D é o ponto de interseção desta reta com a reta vertical de equação $x = 495$. Substituindo na equação acima obtemos:

$$y = \frac{2}{3} \times 495 + 50 = 330 + 50 \Leftrightarrow y = 380.$$

Portanto $D = (495, 380)$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

