



# UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

## Pró-Reitoria de Graduação - Prograd Serviço de Seleção, Orientação e Avaliação - SSOA

Vestibular 2010 — 2ª fase  
Gabarito — Matemática

### Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Considerando-se  $L_i$  a soma dos termos da linha  $i$ ,  $C_j$  a soma dos termos da coluna  $j$ ,  $D_p$  a soma dos termos da diagonal principal e  $D_s$  a soma dos termos da diagonal secundária, tem-se

$$L_1 = (-2x + 3) + (z + 9) + (x + 2y + 1) = -x + 2y + z + 13$$

$$L_2 = (x + y + 2) + (-y + 8) + (-x + 8) = 18$$

$$L_3 = (-4z + 5) + (y - z + 1) + (-x + z + 4) = -x + y - 4z + 10$$

$$C_1 = (-2x + 3) + (x + y + 2) + (-4z + 5) = -x + y - 4z + 10$$

$$C_2 = (z + 9) + (-y + 8) + (y - z + 1) = 18$$

$$C_3 = (x + 2y + 1) + (-x + 8) + (-x + z + 4) = -x + 2y + z + 13$$

$$D_p = (-2x + 3) + (-y + 8) + (-x + z + 4) = -3x - y + z + 15$$

$$D_s = (-4z + 5) + (-y + 8) + (x + 2y + 1) = x + y - 4z + 14$$

Levando-se em conta que as expressões obtidas para  $L_1$  e  $C_3$ , assim como as expressões obtidas para  $L_3$  e  $C_1$ , são iguais, o sistema pedido pode ser reduzido a um máximo de quatro equações. Além disso, todas as somas devem ser iguais e, como,  $L_2 = C_2 = 18$ , tem-se

$$\begin{cases} -x + 2y + z + 13 = 18 \\ -x + y - 4z + 10 = 18 \\ -3x - y + z + 15 = 18 \\ x + y - 4z + 14 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ -x + y - 4z = 8 \\ -3x - y + z = 3 \\ x + y - 4z = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento, tem-se

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 8 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -9 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 33 & -33 \\ 0 & 0 & -18 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Assim,  $x = -2$ ,  $y = 2$ ,  $z = -1$ .

### Questão 02 (Valor: 15 pontos)

- Cálculo do vértice da parábola

A abscissa do vértice é a solução da equação

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^x - 4) = -2 \Rightarrow 2^x - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow 2^x - 4 = 4 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3.$$

Assim, a parábola tem vértice no ponto  $V = (3, -2)$ .

- Cálculo dos coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$

Sendo  $r$  a razão da P.G., tem-se  $f(x) = a_1 x^2 + (a_1 r)x + (a_1 r^2)$  e, como as coordenadas do vértice em função dos coeficientes são dadas por

$$x_V = -\frac{a_1 r}{2a_1} = -\frac{r}{2} = 3 \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a_1} = -\frac{(a_1^2 r^2 - 4a_1^2 r^2)}{4a_1} = \frac{3a_1 r^2}{4} = -2,$$

conclui-se que  $r = -6$  e  $a_1 = -\frac{2}{27}$ .

$$\text{Logo } a_6 = a_1 r^5 = -\frac{2}{27} \cdot (-6)^5 = 576.$$

**Questão 03 (Valor: 15 pontos)**

- Cálculo de  $z_1$

$$8i = 8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \left( \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right) \right), \text{ para } k = 0, 1 \text{ e } 2$$

$$k = 0 \Rightarrow z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \Rightarrow z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Assim,  $z_1 = -\sqrt{3} + i$ .

- Cálculo de  $z_2$

$z_2$  é uma solução da equação biquadrada  $x^4 + x^2 - 12 = 0$ .

Usando-se a mudança de variável  $x^2 = y$ , obtém-se a equação  $y^2 + y - 12 = 0$  que tem raízes  $y = -4$  e  $y = 3$ .

Para  $y = -4$  conclui-se que  $x = \pm 2i$  e para  $y = 3$  conclui-se que  $x = \pm\sqrt{3}$ .

Uma vez que  $z_2$  é uma solução complexa, com parte imaginária positiva,  $z_2 = 2i$

$$\left| \sqrt{3} \frac{z_1}{z_2} + \bar{z}_2 \right| = \left| \sqrt{3} \left( \frac{-\sqrt{3} + i}{2i} \right) - 2i \right| = \left| -\frac{3}{2i} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2i \right| = \left| \left( \frac{3i}{2} - 2i \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$\text{Logo, } \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

**Questão 04 (Valor: 15 pontos)**

- Cálculo de  $g(x)$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \operatorname{sen} x$$

$$\text{Logo, } g(x) = 2 - \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

- No intervalo dado,  $f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $g(x) = 2 - \operatorname{sen} x$ , logo a equação a ser resolvida é  $\operatorname{sen}^2 x + (2 - \operatorname{sen} x) - \frac{7}{4} = 0$ , isto é,  $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} = 0$ .

$$\text{Assim, } \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ e } x = \frac{\pi}{6}.$$

**Questão 05 (Valor: 20 pontos)**

$A \cap B \cap C$  corresponde à região hachurada ao lado e para o cálculo da área pode ser dividida em três regiões.

- Dois setores circulares do círculo de raio igual a 2, de mesma área, limitados pelas retas  $y = \sqrt{3}x$ ,  $y = -\sqrt{3}x$  e pelo eixo  $Ox$ .

A reta  $y = \sqrt{3}x$  tem coeficiente angular igual a  $\sqrt{3} = \tan \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo que a reta faz com o eixo  $Ox$ .

Assim,  $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  rad e a área do setor circular é  $A_1 = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}4\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  u.a.

- Dois setores circulares do círculo de raio igual a 2, de mesma área, limitados pelas retas que passam pela origem e pelos pontos de intersecção da circunferência com a reta  $y = -\sqrt{2}$ .

Resolvendo o sistema  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$  obtém-se  $x^2 + 2 = 4$  e portanto  $x = \pm\sqrt{2}$

Assim, os pontos de intersecção são  $P_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e estão sobre as retas  $y = x$  e  $y = -x$ .

A área do setor circular formado pela reta  $y = -x$ , o círculo de raio 2 e o eixo  $Ox$  é, portanto,

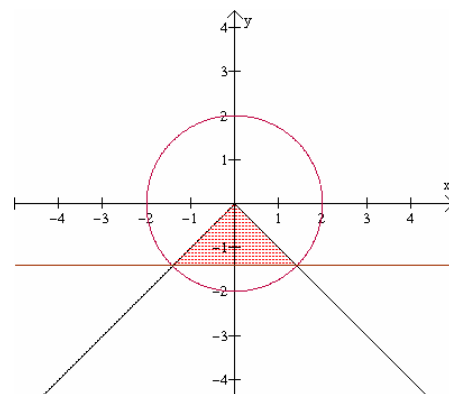
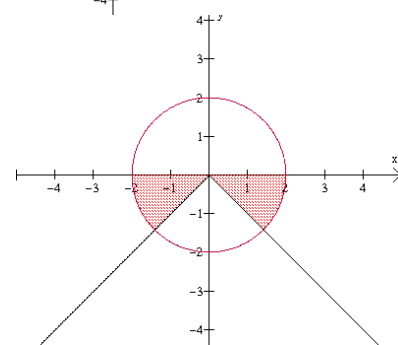
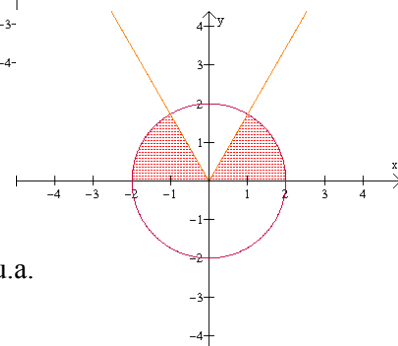
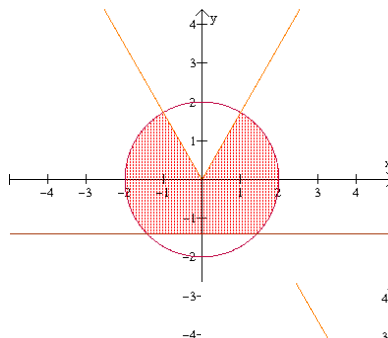
$$A_2 = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}4\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
 u.a.

- O triângulo com vértices na origem e nos pontos de intersecção do círculo com a reta  $y = -\sqrt{2}$ .

Esse triângulo com vértices na origem e nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  tem base igual a  $2\sqrt{2}$  u.c. e altura  $\sqrt{2}$  u.c. Logo área  $A_3 = 2$  u.a.

A área da região limitada por  $A \cap B \cap C$  é, portanto,

$$2A_1 + 2A_2 + A_3 = \frac{4\pi}{3} + \pi + 2 = \frac{6+7\pi}{3}$$
 u.a.



**Questão 06 (Valor: 20 pontos)**

A pirâmide está inscrita em um cilindro circular reto de volume igual a  $24\pi\text{cm}^3$  e área de cada base igual a  $4\pi\text{cm}^2$ .

Uma vez que o volume de um cilindro circular reto é dado por  $V = \pi r^2 h$ , sendo  $r$  o raio da base e  $h$  a altura, conclui-se que  $r = 2\text{cm}$  e  $h = 6\text{cm}$ .

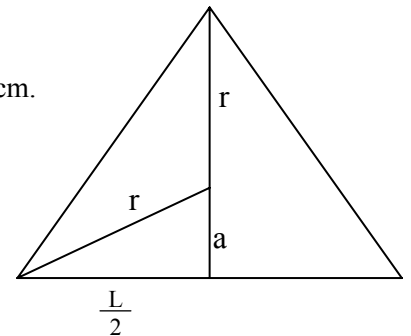
A base da pirâmide é um triângulo inscrito em um círculo de raio  $r = 2\text{cm}$ .

Sendo  $H$  a altura do triângulo e  $L$  o lado, tem-se  $2 = \frac{2}{3}H$  e  $a = \frac{1}{3}H = \frac{2}{2} = 1\text{cm}$ .

Assim:

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{L^2}{4} = 4 - 1$$

$$L^2 = 12 \Rightarrow L = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$



O triângulo inscrito tem lado  $L = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ , altura  $H = 3\text{cm}$  e área igual a  $3\sqrt{3}\text{ cm}^2$ .

Uma vez que a altura da pirâmide é a mesma do cilindro,  $h = 6\text{cm}$ , o volume da pirâmide é  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6$ ,

portanto,  $V_1 = 6\sqrt{3}\text{ cm}^3$ .

A pirâmide menor obtida pela secção por um plano paralelo à base, situado a uma distância de  $2\text{cm}$  do vértice, tem altura igual a  $2\text{cm}$  e volume  $V_2$ .

Uma vez que a pirâmide maior e a menor são semelhantes, a razão entre seus volumes é o cubo da razão entre suas alturas, portanto,  $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 27 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1}{27} = \frac{6\sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ .

Logo, o volume do tronco de pirâmide é  $V_1 - V_2 = 6\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{52\sqrt{3}}{9}\text{ cm}^3$ .

**Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.**

Salvador, 13 de dezembro de 2009

Antonia Elisa Caló de Oliveira Lopes  
Diretora do SSOA/UFBA

# Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



## Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



## Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



## Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

