

BERNOULLI COLÉGIO E PRÉ-VESTIBULAR



http://www.colegiobernoulli.com.br/bernoulli_resolve/

Matemática – Questão 01

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função do segundo grau, em que a , b e c são números reais.

Sabe-se que

- o gráfico dessa função passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(2, 6)$; e
- essa função possui uma única raiz.

Considerando esses dados, **CALCULE** os valores de a , b e c .

RESOLUÇÃO:

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Substituindo os pontos $(1,3)$ e $(2,6)$ pertencentes ao gráfico dessa função, obtemos as equações (I) e (II). A função possui uma única raiz, portanto o discriminante (Δ) é igual a zero, o que nos fornece a equação III.

$$\begin{array}{l} \text{I)} \\ \text{II)} \\ \text{III)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{array} \right.$$

Fazemos:

$$(II) - (I) \Rightarrow 3a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 3a \quad (IV)$$

$$(II) - 2 \cdot (I) \Rightarrow 2a - c = 0 \Rightarrow c = 2a \quad (V)$$

Substituindo (IV) e (V) em (III), temos

$$(3 - 3a)^2 - 4 \cdot a \cdot 2a = 0 \Leftrightarrow 9 - 18a + 9a^2 - 8a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 18a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 9 \pm 6\sqrt{2}$$

Substituindo os valores de a em (IV) e (V), obtemos os respectivos valores de b e c .

$$a = 9 + 6\sqrt{2}, b = -24 - 18\sqrt{2} \text{ e } c = 18 + 12\sqrt{2}$$

ou

$$a = 9 - 6\sqrt{2}, b = -24 + 18\sqrt{2} \text{ e } c = 18 - 12\sqrt{2}$$

Matemática – Questão 02

Sabe-se que, para a conversão de graus Fahrenheit em graus Celsius, a fórmula correta é

$$T_c = \frac{5}{9}(T_f - 32)$$

em que T_f e T_c indicam as temperaturas em graus, respectivamente, Fahrenheit e Celsius.

Quando em viagem pelos Estados Unidos, para simplificar os cálculos, Pedro convertia a temperatura, dada em graus Fahrenheit, para o valor correspondente em graus Celsius, usando a expressão

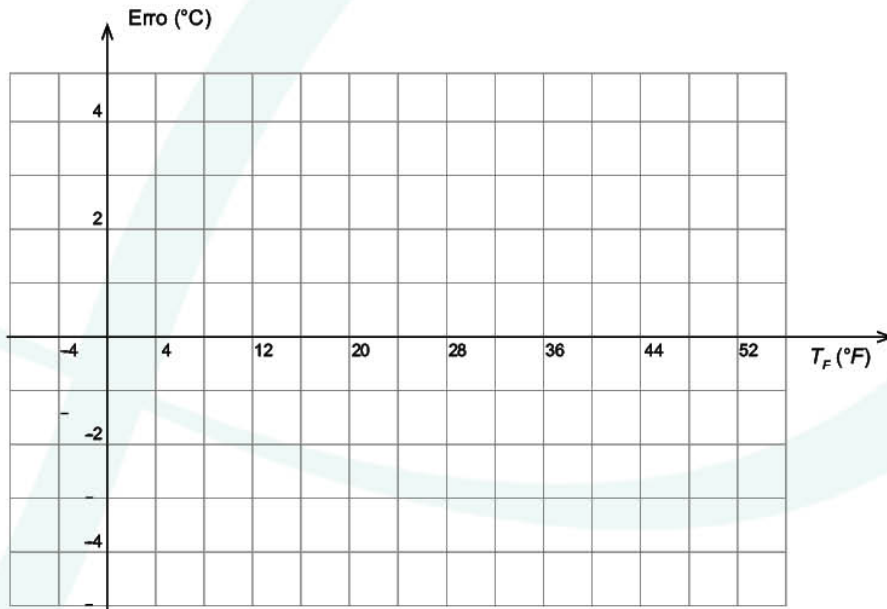
$$\bar{T}_c = \frac{T_f}{2} - 17$$

Durante a estada de Pedro nesse país, a temperatura variou de -4°F a 50°F .

Com base nessas informações,

1. **DETERMINE** a temperatura, **em graus Fahrenheit**, em que o erro cometido por Pedro, ao usar essa expressão, é **nulo**.
2. Define-se **erro absoluto** como o módulo do erro.

TRACE, no plano cartesiano abaixo, o gráfico do **erro absoluto** cometido por Pedro, em função de T_f para $-4 \leq T_f \leq 50$.



3. **CALCULE** o erro absoluto **máximo** cometido por Pedro para $-4 \leq T_f \leq 50$.

RESOLUÇÃO:

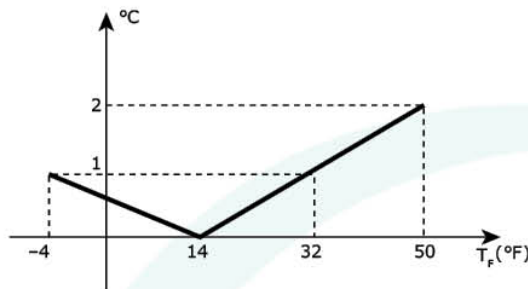
1. Para que o erro seja zero, a temperatura obtida por Pedro deve ser igual àquela obtida utilizando a fórmula correta.

$$\bar{T}_c = T_c$$

$$\frac{T_f}{2} - 17 = \frac{5}{9}(T_f - 32)$$

$$T_f = 14^\circ\text{F}$$

- 2.



$$E_{\text{RRD}} = |T_c - \bar{T}_c| = \left| \frac{T_f - 14}{18} \right|$$

3. Pelo gráfico, podemos ver que ERRO MÁXIMO: 2°C

Matemática – Questão 03

Considere uma circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, em que a e b são números reais e r é um número real positivo.

Sabe-se que

- a reta de equação $y = x + 5$ tangencia essa circunferência no ponto $T = (1, 6)$; e
- a reta de equação $y = x + 3$ determina, nessa circunferência, uma corda PQ de comprimento $2\sqrt{30}$.

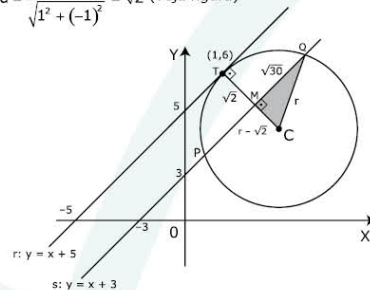
DETERMINE os valores de a , b e r .

RESOLUÇÃO:

Seja a circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ e as retas de equações $r: y = x + 5$ e $s: y = x + 3$ mostradas a seguir:

A distância entre as duas retas é igual à distância do ponto $T(1,6)$ até a reta $s: x - y + 3 = 0$, dada por

$$d = \frac{|1 - 6 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \text{ (veja figura)}$$



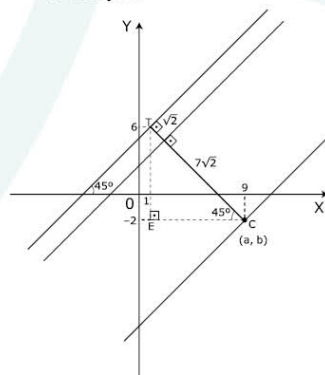
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CMQ, temos

$$r^2 = (r - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{30})^2$$

$$r = 8\sqrt{2}$$

Determinação do centro:

1ª solução:



Como as retas paralelas mostradas na figura têm coeficiente angular 1 (formam 45° com o eixo $0x$), o triângulo retângulo TEC é isósceles.

Já que $TC = 8\sqrt{2}$, temos $TE = EC = 8$.

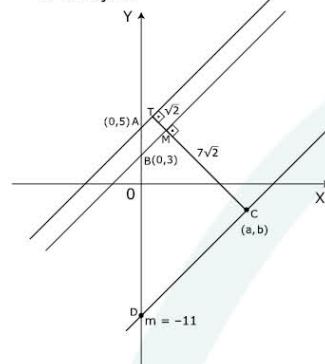
Portanto,

$$a = x_T + 8 = 1 + 8 = 9$$

$$b = y_T - 8 = 6 - 8 = -2$$

$$a = 9 \text{ e } b = -2$$

2ª solução:



Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{TM}{MC} \Leftrightarrow \frac{2}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$$

$$BD = 14 \text{ e } m = -11$$

Portanto, a reta de equação $y = x - 11$ passa pelo centro da circunferência e $b = a - 11$.

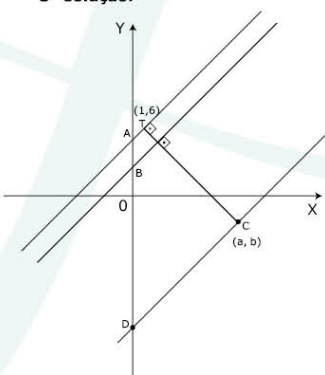
Como a distância de (a, b) a $(1, 6)$ é $8\sqrt{2}$ (raio da circunferência), temos

$$(a - 1)^2 + (b - 6)^2 = (8\sqrt{2})^2$$

Substituindo $b = a - 11$ na equação anterior, achamos

$$a = 9 \text{ e } b = -2$$

3ª solução:



Poderíamos, ainda, achar a equação da reta TC, que possui coeficiente angular -1 e passa por $T(1, 6)$:

$$\overline{TC}: y = -x + 7$$

Como essa reta passa pelo centro $C(a, b)$, temos que $b = -a + 7$ (I)

A distância entre os pontos (a, b) e $(1, 6)$ é $8\sqrt{2}$ (raio da circunferência).

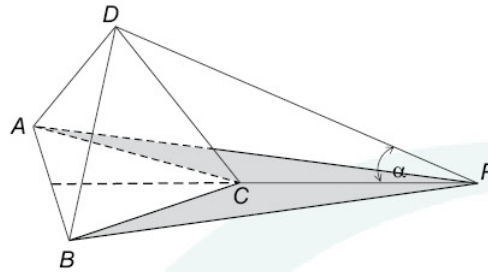
$$\text{Assim } (a - 1)^2 + (b - 6)^2 = (8\sqrt{2})^2 \text{ (II)}$$

Das equações (I) e (II), determinamos

$$a = 9 \text{ e } b = -2$$

Matemática – Questão 04

Nesta figura, estão representadas uma pirâmide, em forma de um tetraedro regular ABCD, e sua sombra, em forma de um quadrilátero ACBP:



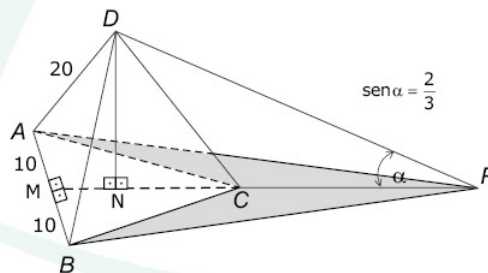
Sabe-se que

- cada aresta da pirâmide mede 20 m;
- o segmento CP está contido na mediatriz do segmento AB; e
- o seno do ângulo $\alpha = \angle CPD$ é $\frac{2}{3}$.

Considerando esses dados,

1. **CALCULE** a altura da pirâmide.
2. **CALCULE** a área da sombra da pirâmide.

RESOLUÇÃO:



1. Seja a altura da pirâmide o segmento DN.

Aplicando Pitágoras no triângulo DNC, temos $(DN)^2 + (NC)^2 = (DC)^2$.

Mas NC corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero ABC, ou seja, $NC = \frac{2}{3} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

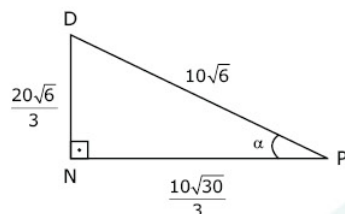
Assim,

$$(DN)^2 + \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 20^2$$

$$DN = \frac{20\sqrt{6}}{3}$$

2. A área hachurada corresponde à diferença entre as áreas dos triângulos ABP e ABC. Precisamos determinar $PM = PN + NM$. Sabemos que $NM = \frac{1}{3} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

No triângulo PND, sabendo que $DN = \frac{20\sqrt{6}}{3}$ e $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$, determinamos PN:



$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{DN}{DP} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow DP = 10\sqrt{6} \\ (PN)^2 + \left(\frac{20\sqrt{6}}{3}\right)^2 = (10\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow PN = \frac{10\sqrt{30}}{3} \end{cases}$$

Temos, então:

$$A_{HAC} = A_{APB} - A_{ABC}$$

$$A_{HAC} = \frac{20}{2} \left(\underbrace{\frac{10\sqrt{30}}{3}}_{PN} + \underbrace{\frac{10\sqrt{3}}{3}}_{MN} \right) - \frac{20^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{HAC} = \frac{100\sqrt{3}}{3} (\sqrt{10} - 2) \text{ m}^2$$

Matemática – Questão 05

1. Seja $z = x + iy$ um número complexo, em que x e y são números reais.

DETERMINE as partes real e imaginária de $w = \frac{z+1}{z-1}$ em função de x e y .

2. Seja S o conjunto de todos os números complexos da forma $w = \frac{z+1}{z-1}$, tais que $|z| = 2$.

DETERMINE o elemento de S de maior módulo.

RESOLUÇÃO:

1. Dado $z = x + yi$, calculamos w :

$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{(x+1)+yi}{(x-1)+yi} \cdot \frac{[(x-1)-yi]}{[(x-1)-yi]}$$

$$w = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \cdot i$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2x+1} \\ \operatorname{Im}(w) = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{-2y}{x^2+y^2-2x+1} \end{cases}$$

2. Sabemos que $|z| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 & \text{e} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$|w|^2 = [\operatorname{Re}(w)]^2 + [\operatorname{Im}(w)]^2$$

$$|w|^2 = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2x+1} \right)^2 + \left(\frac{-2y}{x^2+y^2-2x+1} \right)^2.$$

Substituindo $x^2 + y^2 = 4$,

$$|w|^2 = \left(\frac{3}{5-2x} \right)^2 + \left(\frac{-2y}{5-2x} \right)^2$$

Como $y^2 = 4 - x^2$

$$|w|^2 = \frac{25-4x^2}{(5-2x)^2} = \frac{5+2x}{5-2x}$$

No intervalo $-2 \leq x \leq 2$, o valor que maximiza $|w|$ é $x = 2$, já que torna máximo o

numerador e mínimo o denominador da fração $\frac{5+2x}{5-2x}$.

- ...

Logo, $x = 2$, $y = 0$ e $z = 2$

$$w = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow \boxed{w = 3}$$

Matemática – Questão 06

Rodrigo e Gabriel participam de um jogo, em que usam dois dados, cada um com seis faces.

Primeiro, Rodrigo lança os dados e, quando ambos param, os meninos somam os valores das duas faces superiores. Se o resultado dessa soma for igual a 6, Rodrigo vence o jogo.

Se isso não ocorre, então, Gabriel lança os dados e, do mesmo modo, quando ambos param, os meninos somam os valores das duas faces superiores. Se o resultado dessa soma for igual a 7, Gabriel vence.

Caso se verifique qualquer outro valor, o jogo prossegue, até que Rodrigo obtenha o total 6 ou Gabriel, o total 7.

Com base nessas informações, **CALCULE** a probabilidade de Rodrigo

- vencer o jogo no **primeiro** lançamento.
- vencer o jogo fazendo, **no máximo, dois** lançamentos.
- vencer o jogo.

RESOLUÇÃO:

- Observe a seguinte tabela:

Resultado 1º dado Resultado 2º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dos 36 resultados possíveis para o lançamento dos dois dados, Rodrigo ganha em 5: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3).

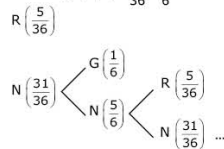
Logo:

$$P(\text{Rodrigo ganhar no } 1^{\circ} \text{ lançamento}) = \frac{5}{36}$$

- Veja a árvore seguinte, em que:
 - R: Rodrigo ganha
 - G: Gabriel ganha
 - N: Ninguém ganha

Obs: 1. Se alguém ganha, acaba o jogo. Se ninguém ganha, o jogo continua.

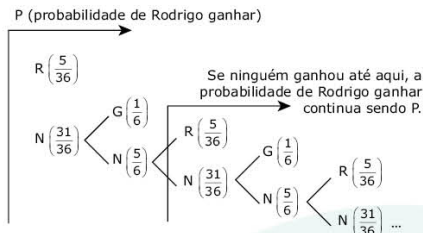
- Gabriel ganha com soma 7. Logo, $P(G) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



A probabilidade de Rodrigo ganhar até o 2º lançamento dele corresponde à probabilidade de ocorrer

$$R \text{ ou } NNR, \text{ ou seja, } P = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} \Rightarrow P = \frac{1855}{7776}$$

- Continuemos analisando a árvore:



1ª Solução:

Aplicando o que foi feito no item 2 indefinidamente, temos

$$P = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} + \dots$$

que corresponde a uma soma infinita de P.G., de razão $q = \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{5}{36}$.

Utilizando a fórmula da soma da PG infinita $S = \frac{a_1}{1-q}$ temos

$$P = \frac{\frac{5}{36}}{1 - \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6}} \Rightarrow P = \frac{30}{61}$$

2ª Solução:

Seja P a probabilidade de Rodrigo ganhar desde o início.

Se nem Rodrigo nem Gabriel ganharem nos seus primeiros lançamentos, volta-se à situação inicial e a probabilidade de Rodrigo ganhar o jogo continua sendo P (veja a figura).

Então,

$$P = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot P$$

Rodrigo ganha no 1º lançamento Ninguém ganha
Rodrigo ganha desde o início. Ninguém ganha Rodrigo ganha a partir do 2º lançamento

Resolvendo a equação anterior, determinamos $P = \frac{30}{61}$

3ª Solução:

Como a partir do 2º lançamento de Rodrigo o ciclo se repete, a probabilidade de Rodrigo ganhar o jogo corresponde à probabilidade de ele ganhar no seu 1º lançamento dividido pela soma das probabilidades de um dos dois ganhar na primeira vez que lança os dados. Assim,

$$P = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{1}{6}} \Rightarrow P = \frac{30}{61}$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

