



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Pró-Reitoria de Graduação - Prograd
Serviço de Seleção, Orientação e Avaliação - SSOA

VESTIBULAR 2007 – 2ª FASE

GABARITO — MATEMÁTICA

Questão 01 (Valor: 10 pontos)

Seja t o tempo transcorrido, a partir da abertura dos dois tanques e V o volume dos mesmos.

Após t horas o volume dos dois tanques será:

$$1^\circ \text{ tanque: } V_1 = V - \frac{t}{4}V = \frac{4V - tV}{4} \quad (1)$$

$$2^\circ \text{ tanque: } V_2 = V - \frac{t}{5}V = \frac{5V - tV}{5} \quad (2)$$

Procura-se o valor de t para que $V_1 = 0,75V_2$, ou seja, $V_1 = \frac{3}{4}V_2$ (3)

Usando-se (1), (2) e (3) acima obtém-se:

$$\frac{4V - tV}{4} = \frac{3}{4} \frac{5V - tV}{5} \Rightarrow 20V - 5tV = 15V - 3tV \Rightarrow 5V = 2tV \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

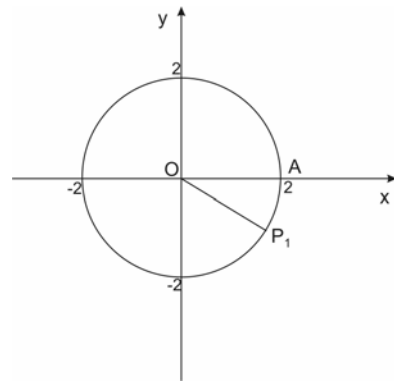
Logo, o tempo necessário é igual a 2 horas e 30 minutos

Questão 02 (Valor: 20 pontos)

Se o comprimento do arco AP_1 é $\frac{\pi}{3}$

e a circunferência tem raio 2, então a medida em radianos do ângulo

$$\angle AOP_1 \text{ é } \frac{\pi/3}{2} = \frac{\pi}{6}.$$



Os pontos P_1, P_2, P_3 dividem a circunferência em três arcos iguais, subtendendo ângulos de $\frac{2\pi}{3}$. Logo, os afixos correspondem a

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2i$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |\sqrt{3} + i + 2i - \sqrt{3} - i| = |2i| = 2 = 2^5 = 32$$

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

Sendo Y_a a temperatura ambiente, $Y_a = 25^\circ\text{C}$. Logo, $Y(t) = 25 + Be^{kt}$. Usando

$$Y(0) = 75^\circ\text{C} \text{ e } Y(1) = 50^\circ\text{C} \text{ obtém-se o seguinte sistema } \begin{cases} 75 = 25 + B & (1) \\ 50 = 25 + Be^k & (2) \end{cases}$$

Da equação (1) tem-se $B = 50$. Substituindo-se o valor de B em (2), obtém-se

$$50 - 25 = 50e^k \Rightarrow e^k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\ln 2$$

Assim, $Y(t) = 25 + 50e^{-\ln 2 t}$. Para se obter o valor de t tal que $Y = 37,5^\circ\text{C}$ resolve-se a equação

$$37,5 = 25 + 50e^{-\ln 2 t} \Rightarrow e^{-\ln 2 t} = \frac{12,5}{50} \Rightarrow e^{-\ln 2 t} = \frac{1}{4} \Rightarrow -\ln 2 t = -\ln 4 \Rightarrow t = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$$

Logo, a temperatura do corpo será de $37,5^\circ\text{C}$ depois de 2 minutos.

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \sin 2x \geq \sin x \Rightarrow 2\sin x \cos x \geq \sin x \Rightarrow 2\sin x \cos x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x(2\cos x - 1) \geq 0$$

Tem-se duas condições a considerar para resolver a última desigualdade acima:

$$(i) \quad \sin x \geq 0 \quad \text{e} \quad 2\cos x - 1 \geq 0 \quad \text{ou}$$

$$(ii) \quad \sin x \leq 0 \quad \text{e} \quad 2\cos x - 1 \leq 0$$

Analisando as duas condições no intervalo $[0, 2\pi]$:

$$(i) \quad \begin{cases} \sin x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi \\ \text{e} \\ 2\cos x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \quad (I)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \sin x \leq 0 \Rightarrow \pi \leq x \leq 2\pi \\ \text{e} \\ 2\cos x - 1 \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\pi, \frac{5\pi}{3}] \quad (II)$$

$$\text{A solução é } (I) \cup (II), \text{ ou seja, } \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$$

Questão 05 (Valor: 20 pontos)

Sendo $A = (a_{ij})$ uma matriz simétrica tem-se que $a_{ij} = a_{ji}$.

- Da condição I, obtém-se os elementos a_{12} , a_{21} , a_{23} , e a_{32} cujos valores correspondem à distância dos pontos P e Q , intersecções da parábola $y = x^2 - 2x + 1$ com a reta $y = -x + 1$.

$$\text{Resolvendo-se o sistema } \begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}, \text{ obtém-se } x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Para $x = 0$ encontra-se $y = 1$ e para $x = 1$ encontra-se $y = 0$, assim $P(0,1)$ e $Q(1,0)$ ou $P(1,0)$ e $Q(0,1)$ e a distância entre P e Q é $\sqrt{2}$

Logo, $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \sqrt{2}$

- Da condição II, obtém-se os elementos a_{13} e a_{31} cujos valores correspondem à área do triângulo PQR, sendo R o simétrico de Q em relação à origem e portanto $R(-1, 0)$ se $Q(1, 0)$ ou $R(0, -1)$ se $Q(0, 1)$

A área do triângulo PQR em qualquer caso é igual a 1.

Logo, $a_{13} = a_{31} = 1$.

- Da condição III, obtém-se os elementos da diagonal a_{11} , a_{22} e a_{33} , cujos valores correspondem ao valor máximo da função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x$.

A função quadrática tem valor máximo que ocorre para $x = \frac{-4}{2(-2)} = 1$. Logo, o valor máximo é $f(1) = 2$ e $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$.

$$\text{A matriz é } \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ e o determinante } \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 2 - 2 - 4 - 4 = 2$$

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

O volume solicitado é igual ao volume do prisma, V_p , menos o volume do cilindro, V_c .

Consideremos a base do prisma o triângulo ABC de lado ℓ , O o centro da circunferência inscrita e P um ponto de tangência do triângulo com a circunferência. Logo OP é perpendicular a BC, e os triângulos retângulos BMC e OPC são semelhantes. Assim

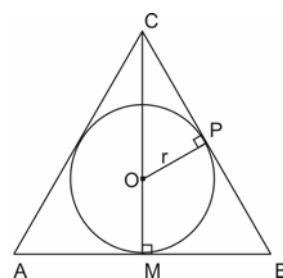
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{CP}} \Rightarrow \frac{\ell/2}{h} = \frac{r}{\ell/2} \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = rh \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = \frac{r\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2 - 2r\ell\sqrt{3}}{4} = 0 \Rightarrow \ell = 2r\sqrt{3}$$

$$V_p = 10S_b \text{ e } S_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12r^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}. \text{ Logo, } V_p = 30r^2\sqrt{3}$$

$$V_c = 10\pi r^2$$

$$V_{\text{solicitado}} = (30r^2\sqrt{3} - 10\pi r^2) = 10r^2(3\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^3$$



Em 17 de dezembro de 2006

Nelson Almeida e Silva Filho
Diretor do SSOA/UFBA

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

