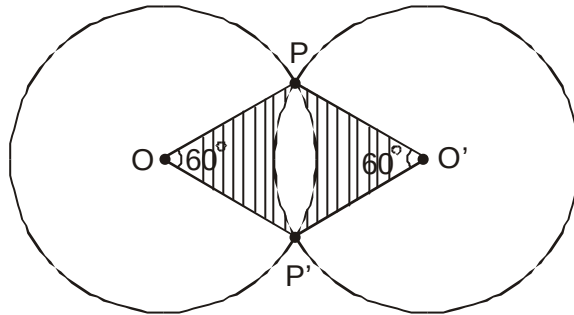


1ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

As circunferências de centro O e O' possuem, ambas, 1cm de raio e se interceptam nos pontos P e P', conforme mostra a figura.



Determine a área da região hachurada.

Cálculos e respostas:

$A \rightarrow$ área da região hachurada
 Sejam $A_S \rightarrow$ área do setor
 $A_T \rightarrow$ área do triângulo OPP'

Temos,

$$A = 2 (2A_T - A_S)$$

$$\text{Mas } A_S = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad A_T = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Logo,

$$A = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \text{ u.a.}$$

2ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

--	--

Considere $\log_b \frac{1}{a} = x$, sendo $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Calcule o valor de $\log_a b^2$.

Cálculos e respostas:

Se $\log_b \frac{1}{a} = x$ então $b^x = a^{-1}$ e $a = b^{-x}$

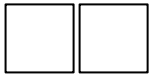
Logo,

$$\log a = -x \log b$$

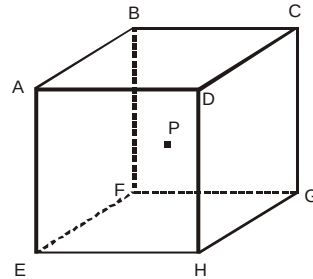
Daí,

$$\log_a b^2 = \frac{\log b^2}{\log a} = \frac{2 \log b}{-x \log b} = -\frac{2}{x}$$

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



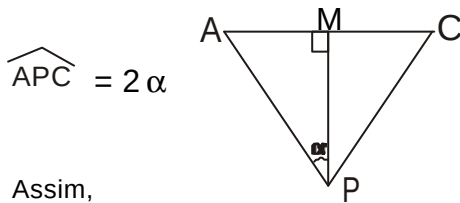
O cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H e o ponto P, que é centro deste cubo, estão representados na figura a seguir.



Considere o triângulo APC e calcule o seno do ângulo $\widehat{APC}$.

Cálculos e respostas:

Indicamos a aresta do cubo por a e o ponto médio de $\overline{AC}$ por M.



$$\widehat{APC} = 2\alpha$$

Assim,

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}$$

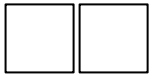
$$\overline{PM} = \frac{a}{2}$$

$\overline{AP}$ é a metade da diagonal do cubo e vale $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Temos } \cos \alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{AP}} = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

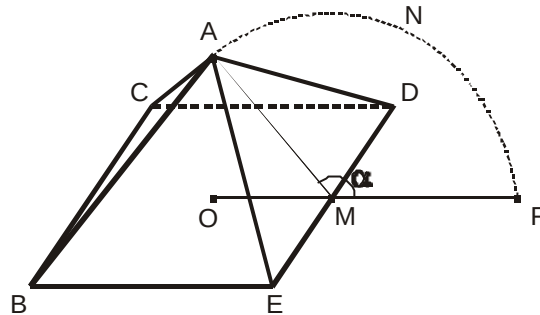
$$\sin \alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin (\widehat{APC}) = \sin (2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Na figura, ABCDE é uma pirâmide regular reta, com $\sqrt{3}$ cm de altura, cuja base é um quadrado com 2 cm de lado e centro O, sendo M o ponto médio de $\overline{DE}$.



Ao longo do plano que passa por A, O e M, desloca-se o segmento $\overline{MA}$, descrevendo-se o arco $\widehat{ANF}$ que subentende o ângulo α .

Sabendo que F pertence ao plano da base da pirâmide, determine o comprimento do arco $\widehat{ANF}$.

Cálculos e respostas:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AO}}{\overline{OM}} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \pi - \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

O comprimento do arco $\widehat{ANF}$ é $\ell = (\overline{AM}) \cdot \alpha$

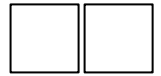
$$\text{Mas, } (\overline{AM})^2 = (\overline{AO})^2 + (\overline{OM})^2.$$

$$\text{Assim, } \overline{AM}^2 = 4 \text{ e } \overline{AM} = 2.$$

Logo,

$$\ell = 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm.}$$

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Em cada uma das duas urnas, U_1 e U_2 , há, apenas, bolas brancas e azuis.
Sabe-se que 60% das bolas contidas em U_1 são brancas e que 50% das bolas contidas em U_2 são azuis.
As duas urnas juntas contêm 500 bolas, das quais 44% são azuis.
Determine quantas bolas há em cada urna.

Cálculos e respostas:

urna $U_1 = x$ bolas $\begin{cases} \blacktriangleright 0,6x \text{ brancas} \\ \blacktriangle 0,4x \text{ azuis} \end{cases}$

urna $U_2 = y$ bolas $\begin{cases} \blacktriangleright 0,5y \text{ azuis} \\ \blacktriangle 0,5y \text{ brancas} \end{cases}$

$$x + y = 500$$

$$0,4x + 0,5y = \frac{44}{100} \times 500 \Rightarrow 4x + 5y = 2200$$

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 4x + 5y = 2200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 2000 \\ 4x + 5y = 2200 \end{cases} \Rightarrow y = 200 \text{ e } x = 300$$

urna $U_1 = 300$ bolas

urna $U_2 = 200$ bolas

6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Seja $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ um arco que satisfaz a equação

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

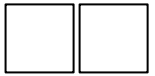
Determine o valor de $\cos(3x)$.

Cálculos e respostas:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sec^2 x \cdot \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

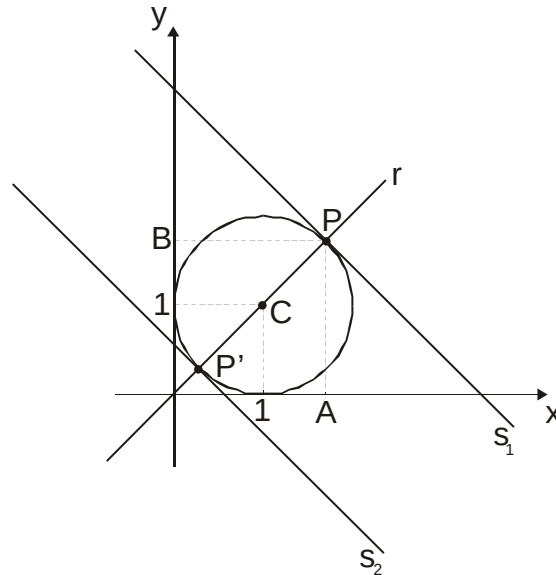
7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Considere a circunferência C, de equação $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, e a reta r que contém a origem e o centro desta circunferência.

Encontre a equação de uma reta que seja perpendicular a r e tangente a C.

Cálculos e respostas:



Equação de r: $y = x$

Mas $s_1 \perp r$, logo $m_{s_1} \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_{s_1} = -1$

Assim, a equação de s_1 (ou s_2) é $y = -x + n$.

Também, $\overline{CP} = 1 \Rightarrow A - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow A = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $P(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P'(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

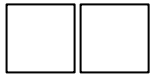
Assim,

$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + n \Rightarrow n = 2 + \sqrt{2}$ ou

$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + n \Rightarrow n = 2 - \sqrt{2}$

Equação de $s_1 = y = -x + (2 + \sqrt{2})$

Equação de $s_2 = y = -x + (2 - \sqrt{2})$

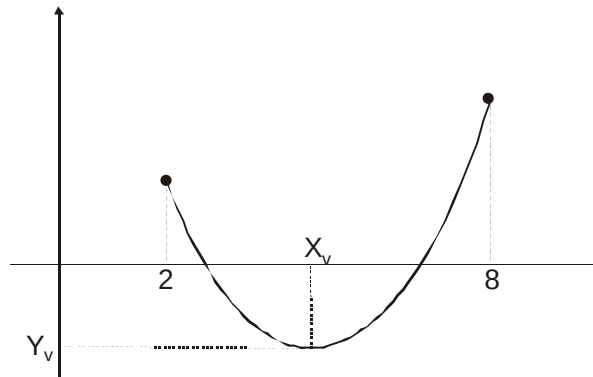


8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Seja a função $f: [2,8] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 9x + 18$. Considere os números u e v tais que $f(u)$ e $f(v)$ são, respectivamente, o maior e o menor valor que f assume.

Calcule a média aritmética entre $f(u)$ e $f(v)$.

Cálculos e respostas:



$$x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 6$$

$$\text{ordenada do vértice: } y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-9}{4}$$

$$f(2) = 2^2 - 9 \times 2 + 18 = 4; \quad f(8) = 64 - 72 + 18 = 10$$

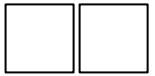
Assim,

$$f(u) = 10 \quad \text{e} \quad f(v) = \frac{-9}{4}$$

Logo,

$$\frac{f(u) + f(v)}{2} = \frac{10 - \frac{9}{4}}{2} = \frac{31}{8}$$

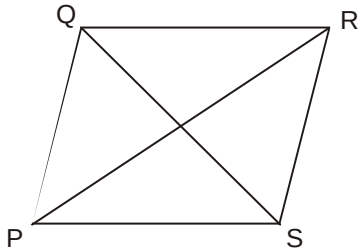
9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Considere os pontos $P(2,3,2)$, $Q(1,2,4)$ e $R(2,1,-1)$. Determine as coordenadas de um ponto S tal que $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ sejam as diagonais do paralelogramo $PQRS$.

Cálculos e respostas:

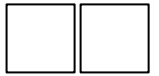
Seja $S(x, y, z)$ o ponto procurado



$$\vec{PQ} = \vec{SR} \Rightarrow (-1, -1, 2) = (2 - x, 1 - y, -1 - z) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - x = -1 \Rightarrow x = 3 \\ 1 - y = -1 \Rightarrow y = 2 \\ -1 - z = 2 \Rightarrow z = -3 \end{cases}$$

Logo, $S(3, 2, -3)$.

**10ª QUESTÃO:** (1,0 ponto)

Dada a função real de variável real f , definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$:

- a) determine $(f \circ f)(x)$;
b) escreva uma expressão para $f^{-1}(x)$.

Cálculos e respostas:

$$\text{a) } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{2x}{2} = x$$

b) Se $(f \circ f)(x) = x$ então $f = f^{-1}$.

Logo,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

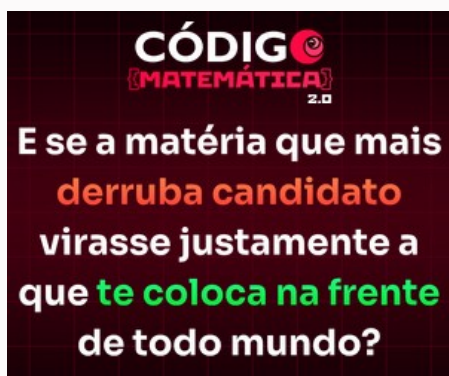
M a t e m á t i c a - G a b a r i t o G r u p o H

--

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

