

OBMEP 2006
SOLUÇÕES DA 2^A FASE
NÍVEL 1

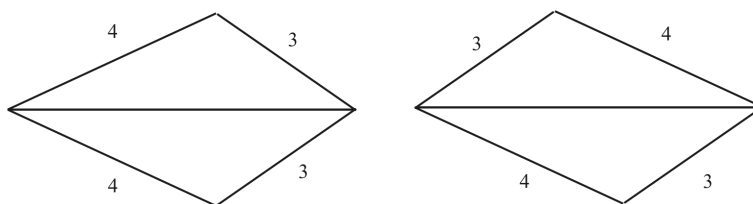
Problema 1

- a) A solução desse item segue diretamente da observação das figuras. Na figura I, vemos que
- as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm;
 - os dois lados que foram unidos são do mesmo tamanho, logo eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm.

Portanto os lados que foram unidos só podem medir 3 cm.

Na figura II, vemos que o maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado do outro triângulo (que mede 3 cm). Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm.

- b) A solução segue do item (a), que fornece as medidas dos lados que não foram unidos. Logo
- o perímetro da figura I é $4 + 6 + 4 + 6 = 20$ cm;
 - o perímetro da figura II é $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$ cm. Foi subtraído 3 cm correspondente ao lado do triângulo que foi unido e não conta no perímetro da figura II.
- c) Da maneira como Miguilim forma as figuras, ele conseguirá a de menor perímetro quando unir os lados maiores, isto é os de 6 cm (já que eles não contarão no cálculo do perímetro). Veja abaixo as duas figuras que ele pode formar assim. O perímetro de cada uma é $2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$ cm.



Problema 2

- a) Se Quim escolher as provas dos três primeiros bimestres, sua média anual será

$$\frac{10 \times (20 + 6 + 32)}{20 + 10 + 40} = \frac{580}{70} \cong 8,3.$$

Já se ele escolher as provas dos três últimos bimestres sua média anual será

$$\frac{10 \times (6 + 32 + 40)}{10 + 40 + 40} = \frac{780}{90} \cong 8,7.$$

(usamos o símbolo $\cong$ para indicar “aproximadamente”).

- b) Como $\frac{20}{20} = 1 = 100\%$, $\frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$, $\frac{32}{40} = 0,8 = 80\%$ e $\frac{40}{40} = 1 = 100\%$, a tabela com as porcentagens de acertos do Quim é

Bimestre	1º	2º	3º	4º
Porcentagem de acertos	100	60	80	100

- c) As provas com maior porcentagem de acertos são as do 1º, 3º e 4º bimestres, com porcentagens 100%, 80% e 100%, respectivamente. A média anual dessas provas é

$$\frac{10 \times (20 + 32 + 40)}{20 + 40 + 40} = \frac{920}{100} = 9,2.$$

Essa média é maior do que as médias anuais calculadas no item (a). Entretanto, há mais uma possibilidade: a média obtida com a escolha das provas do 1º, 2º e 4º bimestres, que é

$$\frac{10 \times (20 + 6 + 40)}{20 + 10 + 40} = \frac{660}{70} \cong 9,4.$$

Logo o Quim não está certo, porque as provas com porcentagem de acertos 100%, 60% e 100%, são as que proporcionam a maior média anual.

Problema 3

- a) Duas maneiras de mostrar que 22 é um supernúmero são $22 = 10 + 12$ e $22 = 11 + 11$; de fato

$$\underbrace{2+2}_{22} = 4 = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{1+2}_{12} = \underbrace{1+1}_{11} + \underbrace{1+1}_{11}.$$

Três maneiras de mostrar que 25 é um supernúmero são $25 = 10 + 15$, $25 = 11 + 14$ e $25 = 12 + 13$; de fato

$$\underbrace{2+5}_{25} = 7 = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{1+5}_{15} = \underbrace{1+1}_{11} + \underbrace{1+4}_{14} = \underbrace{1+2}_{12} + \underbrace{1+3}_{13}.$$

- b) Apresentamos abaixo todas as maneiras possíveis de escrever 49 como soma de dois números de dois algarismos cada (colocando sempre a menor parcela à esquerda):

$$49 = 10 + 39$$

$$49 = 11 + 38$$

$$49 = 12 + 37$$

$$\vdots$$

$$49 = 24 + 25$$

Elas são em número de $24 - 10 + 1 = 15$, e qualquer uma delas pode ser usada para mostrar que 49 é um supernúmero; por exemplo

$$\underbrace{4+9}_{49} = 13 = \underbrace{1+7}_{17} + \underbrace{2+2}_{22}.$$

Logo é possível mostrar que 49 é um supernúmero de 15 maneiras diferentes.

- c) Como 10 é o menor número de dois algarismos, então $10 + 10 = 20$ é o menor número de dois algarismos que pode ser escrito como soma de dois números de dois algarismos. Consideremos agora qualquer número x de dois algarismos, maior ou igual a 20, e vamos chamar de a seu o algarismo das dezenas e b seu o algarismo das unidades. Vamos agora pensar no número $x - 10$. Ele é pelo menos 10 (pois x é pelo menos 20), donde tem dois algarismos; seu algarismo das dezenas é $a - 1$ e seu algarismo das unidades é b , como podemos ver fazendo a subtração:

$$\begin{array}{r} a \quad b \\ - \quad 1 \quad 0 \\ \hline a-1 \quad b \end{array}$$

Então a expressão $x = 10 + (x - 10)$ mostra que x é um supernúmero, pois

$$\underbrace{a+b}_x = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{(a-1)+b}_{x-10}.$$

Um exemplo ajuda a entender melhor este raciocínio. Pensemos em $x = 38$; aqui temos

$$\begin{array}{r} 38 \\ - 10 \\ \hline 28 \end{array}$$

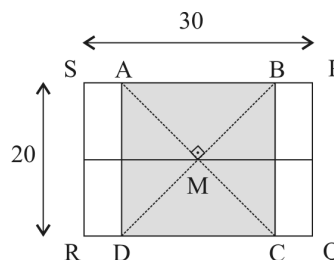
ou seja, $x - 10 = 28$. A expressão $x = 10 + (x - 10)$, neste caso, é $38 = 10 + 28$, que mostra que 38 é um supernúmero pois

$$\underbrace{3+8}_{38} = 11 = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{2+8}_{38-10=28}$$

Logo, todos os números de 20 a 99 são supernúmeros, e eles são em número $99 - 20 + 1 = 80$.

Problema 4

- a) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$, e vamos considerar o quadrilátero $ABCD$ como na figura ao lado. A idéia é verificar que $ABCD$ é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: $ABCD$ é um quadrilátero cujas diagonais



- são iguais (porque $AC = BD$),
- se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- são perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como $ABCD$ é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20$ cm.

- b) Seja M o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos AMB , BMC , CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400$ cm²; logo a

área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100$ cm².

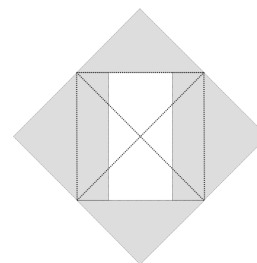
A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600$ cm²; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC , restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a

$$\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}^2.$$

Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo

de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30 - 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Como a área de cada triângulo é 100 cm² e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100$ cm², concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200$ cm².

- c) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800$ cm². Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600 cm², concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200$ cm².



Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB , ou seja, $30 - 20 = 10$ cm. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200$ cm².

Problema 5

- a) *1ª solução:* Como os três copos são iguais, o conteúdo de uma garrafa equivale a meio copo mais um terço do copo mais um quarto do copo, ou seja

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12} \text{ de um copo}$$

Temos então que

1 garrafa equivale a $1 + \frac{1}{12}$ de um copo (= 1 copo + $\frac{1}{12}$ de um copo)

2 garrafas equivalem a $2 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 2 + \frac{2}{12} = 2 + \frac{1}{6}$ de um copo (= 2 copos + $\frac{1}{6}$ de um copo)

3 garrafas equivalem a $3 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 3 + \frac{3}{12} = 3 + \frac{1}{4}$ de um copo (= 3 copos + $\frac{1}{4}$ de um copo)

Logo, para encher os 3 copos são necessárias no mínimo 3 garrafas (sobrando ainda $\frac{1}{4}$ de um copo na terceira garrafa). Portanto os amigos terão que abrir 2 garrafas a mais.

2ª solução: Depois de concluir que o conteúdo de uma garrafa é igual a $\frac{13}{12}$ de um copo, percebemos que falta encher $\frac{1}{2}$ do primeiro copo, $\frac{2}{3}$ do segundo copo e $\frac{3}{4}$ do terceiro copo, ou seja, falta encher $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{23}{12}$ de um copo. Como uma garrafa corresponde a $\frac{13}{12}$ de um copo, falta abrir $\frac{23/12}{13/12} = \frac{23}{13} = 1 + \frac{10}{13}$ garrafas. Logo será necessário abrir mais duas garrafas.

3ª solução: Abaixo estão representados os copos dos três amigos, divididos com marcas de $\frac{1}{12}$ avos.



O desenho mostra que três garrafas são suficientes para encher os copos, sobrando $\frac{1}{4}$ de um copo dentro da terceira garrafa para quem ainda estiver com sede.

- b) Vimos no item (a) que uma garrafa enche $\frac{13}{12}$ de um copo. Logo, ao dividir o conteúdo de uma garrafa por três copos iguais, cada um dos amigos terá $\frac{13}{12} \div 3 = \frac{13}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{36}$ do seu copo cheio de suco.

Problema 6

- a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1 + 2 + 6 + 4 = 13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.
- b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.
- c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na idéia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer “o que falta”. Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

$$\begin{array}{r} \text{dividendo (comprimento da corrida)} \quad | \quad 13 \text{ (divisor)} \\ \text{resto ("o que falta")} \quad \quad \quad \text{quociente (número de voltas completas)} \end{array}$$

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13 \times \text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km; isto é feito por inspeção direta e o resultado é a tabela abaixo.

<i>Extensão em km</i>	<i>Posto de partida</i>	<i>Posto de chegada</i>
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A
14	Qualquer um	O mesmo de partida

A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

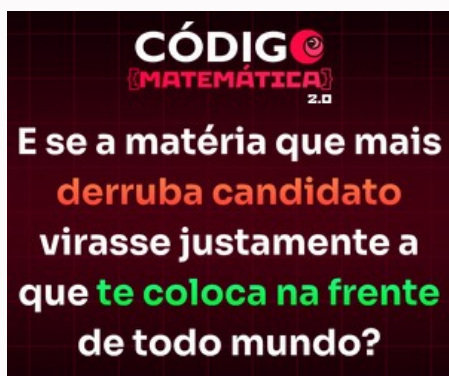
2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida. Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

