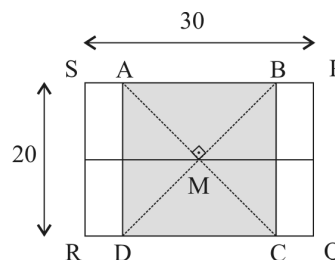


OBMEP 2006
SOLUÇÕES DA 2^A FASE
NÍVEL 2

Problema 1

- a) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$, e vamos considerar o quadrilátero $ABCD$ como na figura ao lado. A idéia é verificar que $ABCD$ é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: $ABCD$ é um quadrilátero cujas diagonais



- são iguais (porque $AC = BD$),
- se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- são perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como $ABCD$ é um quadrado, segue que $AB = BC = CD = DA = 20$ cm.

- b) Seja M o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos AMB , BMC , CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400$ cm²; logo a

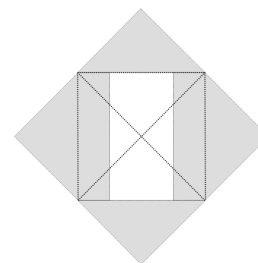
área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100$ cm².

A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600$ cm²; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC , restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a

$$\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}^2.$$

Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30 - 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Como a área de cada triângulo é 100 cm² e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100$ cm², concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200$ cm².

- c) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800$ cm². Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600 cm², concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200$ cm².



Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB , ou seja, $30 - 20 = 10$ cm. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200$ cm².

Problema 2

- a) O Capitão Rodrigo escreveu a letra Q em baixo dos quadrados perfeitos $1^2, 2^2, 3^2, \dots$. Como 2006 está entre 44^2 e 45^2 , isto é,

$$44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2,$$

vemos que 1936 é o maior quadrado perfeito que é menor do que 2006.

1^2 ↓			2^2 ↓			44^2 ↓			
1	2	3	4		1936	1937	1938		2006
Q	N	N	Q		Q	N	N		N
só letras N									

Logo última letra Q foi escrita embaixo do número 1936, ou seja, o Capitão Rodrigo escreveu a letra Q um total de 44 vezes.

- b) O número 1000 está entre $31^2 = 961$ e $32^2 = 1024$, logo, até 1024^a posição foram escritas 32 letras Q e $1024 - 32 = 992$ letras N .

			31^2 ↓				32^2 ↓				33^2 ↓	
1	2		961		1000		1024	1025		1032		1089
Q	N		Q		N		Q	N		N		Q
só letras N						só letras N						

Por isso, a 1000^a letra N aparece depois da 1024^a posição. Para chegar a 1000 letras N faltam 8, que começam na 1025^a posição e acabam na 1032^a posição; notamos que nessas posições não aparece nenhuma letra Q , pois o próximo quadrado perfeito é $33^2 = 1089$. Logo o 1000^o N foi escrito na 1032^a posição.

$$\underbrace{\overset{1}{Q} \overset{4}{NN} \overset{9}{QNNNN} \overset{16}{QNNNNN} \dots \overset{1024}{Q} \overset{1025}{N} \overset{1026}{NNNNNN} \overset{1032}{NNNNNN} \dots}_{1024 \text{ letras } N = 992 \text{ letras } N + 32 \text{ letras } Q} \underbrace{\overset{1033}{N} \overset{1034}{NNNNNN} \overset{1040}{NNNNNN} \dots}_{8 \text{ letras } N} \dots$$

- c) *1ª solução:* Para que ocorra uma sequência da forma $\overset{100 \text{ letras } N}{QNNN \dots NNN} Q$, o primeiro e o último Q correspondem a quadrados consecutivos, com 100 números não quadrados entre eles. Se o primeiro Q corresponde a a^2 , temos

$$\overset{a^2}{\downarrow} \underbrace{QNNN \dots NNN}_{100 \text{ letras } N} \overset{(a+1)^2}{\downarrow} Q \quad \text{e} \quad \underbrace{[(a+1)^2 - a^2] - 1}_{\substack{\text{número de letras } N \\ \text{entre} \\ \text{as duas letras } Q}} = 100.$$

Logo $[(a+1)^2 - a^2] - 1 = 100$, donde

$$(a^2 + 2a + 1 - a^2) - 1 = 2a + 1 = 100$$

ou seja, $2a = 100$ e portanto $a = 50$. Assim, a sequência é

$$\begin{array}{c} 50^2 \\ \downarrow \\ Q \end{array} \overbrace{NNN \dots NNN}^{100 \text{ letras } N} \begin{array}{c} 51^2 \\ \downarrow \\ Q \end{array}.$$

Como $50^2 = 2500$ é maior do que 2006, essa sequência não ocorre na tabela dada.

Observação: A resposta 2500 também foi considerada correta para efeito de correção.

2ª solução: Os blocos de letras N entre quadrados perfeitos crescem de 2 em 2, como podemos ver abaixo:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & a^2 & & (a+1)^2 & & (a+2)^2 \\ Q & \underbrace{NN}_{2 \text{ letras } N} & Q & \underbrace{NNNN}_{4 \text{ letras } N} & Q & \underbrace{NNNNNN}_{6 \text{ letras } N} & Q & \underbrace{NNNNNNNN}_{8 \text{ letras } N} & Q & \underbrace{NNNNNNNNNN}_{10 \text{ letras } N} & Q & \dots & Q & \underbrace{NNN \dots NNN}_{2n \text{ letras } N} & Q & \underbrace{NNN \dots NNN}_{(2n+2) \text{ letras } N} & Q & \dots \end{array}$$

Os dois últimos quadrados perfeitos na tabela são $43^2 = 1849$ e $44^2 = 1936$, entre os quais há 86 letras N . Por outro lado, de 1937 a 2006 há 70 letras N :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 4 & & 1849 & & 1936 & 1937 & & 2006 \\ Q & \underbrace{NN}_{2 \text{ letras } N} & Q & \dots & Q & \underbrace{N \dots N}_{86 \text{ letras } N} & Q & \underbrace{N \dots N}_{70 \text{ letras } N} & \dots \end{array}$$

Como os blocos de letras N entre quadrados perfeitos são de tamanho crescente, segue que em nenhum lugar da tabela aparecem 100 letras N seguidas

Problema 3

- a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1 + 2 + 6 + 4 = 13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.
- b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.
- c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na idéia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer “o que falta”. Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

$$\begin{array}{r} \text{dividendo (comprimento da corrida)} \quad | \quad 13 \text{ (divisor)} \\ \hline \text{resto ("o que falta")} \quad \quad \quad \text{quociente (número de voltas completas)} \end{array}$$

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13 \times \text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km; isto é feito por inspeção direta e o resultado é a tabela abaixo.

<i>Extensão em km</i>	<i>Posto de partida</i>	<i>Posto de chegada</i>
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A
14	Qualquer um	O mesmo de partida

A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

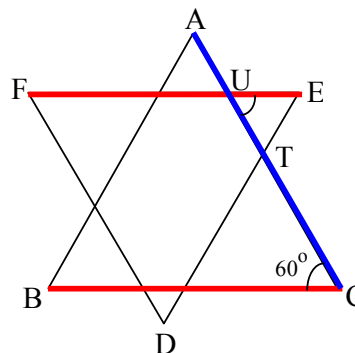
1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida. Vejamos alguns casos:

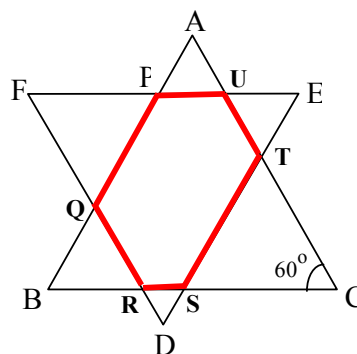
- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.

Problema 4

- a) Como o triângulo ABC é equilátero, todos seus ângulos internos medem 60° . Como BC e EF são paralelos e cortados pela transversal AC , os ângulos $\widehat{EUT}$ e $\widehat{ACB}$ são alternos internos, donde $\widehat{EUT} = \widehat{ACB} = 60^\circ$.

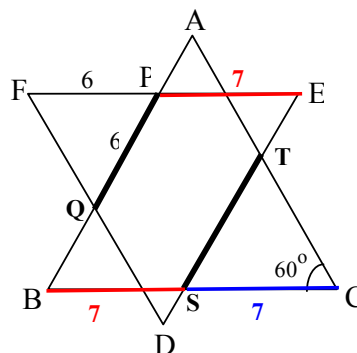


- b) Como DEF é um triângulo equilátero, temos que $\widehat{UET} = 60^\circ$, e do item (a) sabemos que $\widehat{EUT} = 60^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , segue que $\widehat{UTE} = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$. Logo, o triângulo EUT é equilátero, porque todos os seus ângulos internos medem 60° . Da mesma forma, podemos concluir que todos os outros triângulos da figura são equiláteros. Desse modo, temos $QP = FP$, $UT = UE$, $TS = CS$ e $RQ = RB$. Segue que o perímetro de $PQRSTU$ é



$$\begin{aligned} QP + PU + UT + TS + SR + RQ &= (FP + PU + UE) + (CS + SR + RB) \\ &= FE + CB = 13 + 14 = 27 \text{ cm} \end{aligned}$$

- c) De $PQ = 6$ cm segue que $FP = 6$ cm, pois o triângulo QFP é equilátero, e concluímos que $PE = FE - FP = 13 - 6 = 7$ cm. Como BC é paralelo a EF e AB é paralelo a DE , o quadrilátero $PESB$ é um paralelogramo, donde $BS = PE = 7$ cm. Finalmente, temos $SC = BC - BS = 14 - 7 = 7$ cm; logo $ST = SC = 7$ cm, pois o triângulo TCS é equilátero.



Uma solução análoga pode ser dada a partir do paralelogramo $QDTA$.

Problema 5

- a) A maior soma possível de nove números dentre os escritos nos cartões é $19 + 18 + \dots + 11 = 135$. Portanto, a soma dos números escritos nos cartões de Ana não pode ser igual a 136.
- b) Sejam A , B e P as somas dos números dos cartões de Ana, Bibiana e Pedro Missionário, respectivamente. Do enunciado temos $A = B + 90$ e do item anterior temos $A \leq 135$. Logo $B + 90 \leq 135$ e portanto $B \leq 135 - 90 = 45$.
- Por outro lado, como Bibiana tem 9 cartões, segue que $B \geq 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Vamos então que $B \leq 45$ e $B \geq 45$, donde $B = 45$ e então $A = 45 + 90 = 135$. Logo os cartões que estão com Ana são os de números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19, pois na situação do problema esses são os únicos números cuja soma é 135. Analogamente, concluímos que os cartões que estão com Bibiana são os de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Logo, Pedro tem o cartão de número 10.

Problema 6

a) A solução é feita em seis passos, assinalado cada um deles em vermelho.

1º passo

1	2		
3	4		
	3	1	
			2

2º passo

1	2		
3	4	2	
	3	1	
	1		2

3º passo

1	2		
3	4	2	1
	3	1	4
	1		2

4º passo

1	2		3
3	4	2	1
2	3	1	4
			2

5º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1		2

6º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

b) Não. No quadradinho assinalado com X não podemos colocar nem o 3 nem o 4 porque a 2ª linha já contém esses números. Por outro lado também não podemos colocar nem 1 nem 2 porque a última coluna já contém esses números.

1	2		
3	4		X
			2
			1

c) De acordo com o item (b), temos quatro opções para preencher o quadrado D, que são

3	4
2	1

4	3
2	1

2	3
4	1

2	4
3	1

Como no item (b), vemos que opção sombreada não é possível, uma vez que não teremos como preencher o quadradinho assinalado com X.

1	2		
3	4		
	X	3	1

Logo, para preencher o quadrado D só restam as 3 opções

2	3
4	1

3	4
2	1

4	3
2	1

Uma vez preenchido o quadrado D, os quadrados B e C podem ser preenchidos de modo único. Logo, temos 3 maneiras para completar o quadrado original, que são

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

d) Para preencher o quadrado A, na ordem crescente 1, 2, 3 e 4 temos a seguinte situação:

- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 posições;
- colocado o 1, temos 3 posições para o 2;
- colocados o 1 e o 2, temos 2 posições para o 3;
- colocados o 1, o 2 e o 3 temos apenas uma posição para o 4.

Logo, o quadrado A pode ser preenchido de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras.

Preenchido o quadrado A, vamos agora preencher o quadrado D:

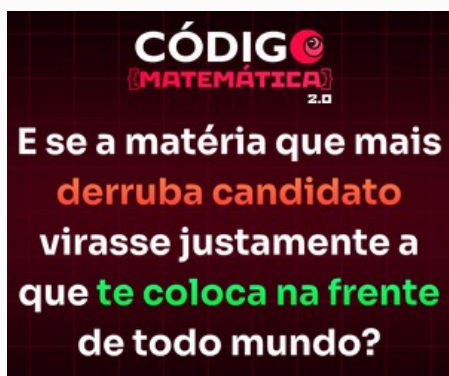
- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas;
- uma vez colocado o 1, usando o mesmo argumento que no item (c), vemos que existem 3 maneiras de completar o quadrado D.

Logo, temos $24 \times 4 \times 3 = 288$ modos de preencher os quadrados A e D. Sabemos que, estando esses dois quadrados preenchidos, só temos uma maneira de preencher os quadrados B e C. Logo, o número total de quadrados especiais é 288.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

