

45. João escreveu o número 10 como soma de duas parcelas inteiras positivas, cujo produto é o maior possível. O valor desse produto é:

- A) 9.
- B) 16.
- C) 21.
- D) 25.
- E) 27.

Questão 45 – Alternativa D

Solução: A alternativa **D** está correta.

As únicas possibilidades são $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$ e $5 + 5$, às quais correspondem os produtos 9, 16, 21, 24 e 25. Logo, o maior valor do produto é 25.

46. Sobre a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \frac{x}{x+1}$, é correto afirmar que:

- A) f é estritamente crescente.
- B) f é estritamente decrescente.
- C) o gráfico de f é uma parábola.
- D) $f \circ f = f$.
- E) $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in [0, +\infty)$.

Questão 46 – Alternativa A

Solução: A alternativa **A** está correta.

A função f é estritamente crescente se e só se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Mas para $x, y \geq 0$ temos

$$f(x) < f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < \frac{y}{y+1} \Leftrightarrow x(y+1) < y(x+1) \Leftrightarrow x < y.$$

O argumento acima mostra que a alternativa **A** é correta e elimina a alternativa **B**.

Quanto à alternativa **C**, como $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ e o gráfico de $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, é um ramo de hipérbole, é imediato ver que o mesmo sucede com o gráfico de f . A função composta de f consigo mesma tem expressão

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1},$$

eliminando assim a alternativa **D**. Por fim, como $f(1) + f(1) \neq f(2)$, a alternativa **E** também é falsa.

47. Seja $f : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = |x - \sqrt{x^2 - 1}|$. É correto afirmar que:

- A) $f(1) = 2$.
- B) $f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ se $x \geq 1$.
- C) $f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ se $x \leq -1$.
- D) $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$ se $x \leq -1$.
- E) $f(x) = 0$ para todo real x no domínio de f .

Questão 47 – Alternativa C

Solução: A alternativa **C** está correta.

Veja que $0 \leq x^2 - 1 < x^2$ para todo real x tal que $|x| \geq 1$; portanto, $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} = |x|$ para tais x . Para $x \leq -1$, temos $|x| = -x$, e daí $\sqrt{x^2 - 1} < -x$, ou ainda $\sqrt{x^2 - 1} + x < 0$. Logo,

$$f(x) = |x + \sqrt{x^2 - 1}| = -(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$$

para $x \leq -1$.

A discussão acima também mostra que as alternativas **D** e **E** são falsas. Para $x \geq 1$, temos como acima, que $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ e, consequentemente, $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$; logo, a alternativa **B** é falsa. Por fim, a alternativa **A** é falsa, pois $f(1) = 1 \neq 2$.

48. Em um contêiner de 10 m de comprimento, 8 m de largura e 6 m de altura, podemos facilmente empilhar 12 cilindros de 1 m de raio e 10 m de altura cada, bastando dispô-los horizontalmente, em três camadas de quatro cilindros cada. Porém, ao fazê-lo, um certo volume do contêiner sobrarão como espaço vazio. Adotando 3,14 como aproximação para π , é correto afirmar que a capacidade volumétrica desse espaço vazio é:

- A) inferior à capacidade de um cilindro.
- B) maior que a capacidade de um cilindro mas menor que a capacidade de dois cilindros.
- C) maior que a capacidade de dois cilindros mas menor que a capacidade de três cilindros.
- D) maior que a capacidade de três cilindros mas menor que a capacidade de quatro cilindros.
- E) maior que a capacidade de quatro cilindros.

Questão 48 – Alternativa D

Solução: A alternativa **D** está correta.

O volume do contêiner é igual a 480 m^3 ; o volume de um cilindro é igual a $\pi \times 1^2 \times 10 = 31,4 \text{ m}^3$, de maneira que o volume dos doze cilindros juntos é igual a $12 \times 31,4 = 376,8 \text{ m}^3$. Portanto, o volume do espaço vazio é igual a $480 - 376,8 = 103,2 \text{ m}^3$, o que corresponde ao volume de mais de três e menos de quatro cilindros.

49. Em um sistema Cartesiano de coordenadas, o valor positivo de b tal que a reta $y = x + b$ é tangente ao círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ é:

- A) 2.
- B) 1.
- C) $\sqrt{2}$.
- D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- E) 3.

Questão 49 – Alternativa C

Solução 1: A alternativa **C** está correta.

A reta tangente, sendo da forma $y = x + b$, tem coeficiente angular 1 e tangencia o círculo em um ponto (e, f) tal que $e, f \neq 0$, $f = e + b$ e $e^2 + f^2 = 1$ (*). Por outro lado, dado um ponto (e, f) do círculo $x^2 + y^2 = 1$ com $e, f \neq 0$, a reta passando pela origem e pelo ponto dado tem coeficiente angular f/e . Como a tangente a um círculo por um ponto do mesmo círculo é perpendicular ao raio que passa pelo ponto, segue que a reta tangente ao círculo no ponto (e, f) tem coeficiente angular $-e/f$.

Comparando os dois valores para o coeficiente angular da tangente, obtemos $e = -f$, relação que substituída em (*) fornece $(e, f) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Segue agora de $b = f - e > 0$ que

$(e, f) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e daí $b = \sqrt{2}$. Assim, a reta tangente procurada tem equação $y = x + \sqrt{2}$.

Solução 2.

A reta $y = x + b$ será tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ se e só se o sistema de equações

$$\begin{cases} y = x + b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

tiver uma única solução. Substituindo a expressão para y na segunda equação, obtemos a equação de segundo grau $x^2 + (x + b)^2 = 1$, que deve então ter raízes iguais. Logo, seu discriminante deve ser identicamente nulo, o que nos fornece a equação $(2b)^2 - 4.2(b^2 - 1) = 0$, ou ainda $b^2 = 2$. Como $b > 0$, temos $b = \sqrt{2}$.

50. Uma garrafa está cheia de uma mistura, na qual $\frac{2}{3}$ do conteúdo é composto pelo produto A e $\frac{1}{3}$ pelo produto B. Uma segunda garrafa, com o dobro da capacidade da primeira, está cheia de uma mistura dos mesmos produtos da primeira garrafa, sendo agora $\frac{3}{5}$ do conteúdo composto pelo produto A e $\frac{2}{5}$ pelo produto B. O conteúdo das duas garrafas é derramado em uma terceira garrafa, com o triplo da capacidade da primeira. Que fração do conteúdo da terceira garrafa corresponde ao produto A?

- A) $\frac{10}{15}$
 B) $\frac{5}{15}$
 C) $\frac{28}{45}$
 D) $\frac{17}{45}$
 E) $\frac{3}{8}$

Questão 50 – Alternativa C

Solução: A alternativa C está correta.

Denotando por V o conteúdo da primeira garrafa, temos que o conteúdo da segunda garrafa é $2V$ e da terceira garrafa é $3V$. Agora, o conteúdo do produto A na primeira garrafa é $(\frac{2}{3})V$ e o conteúdo do produto A na terceira garrafa é $(\frac{3}{5}).2V$, de maneira que o conteúdo de A na terceira garrafa é $(\frac{2}{3})V + (\frac{6}{5})V = (\frac{28}{15})V$. Segue daí que a fração do produto A na terceira garrafa é

$$\frac{\left(\frac{28}{15}\right)V}{3V} = \frac{28}{45}.$$

51. Dois dos ângulos internos de um triângulo têm medidas iguais a 30° e 105° . Sabendo que o lado oposto ao ângulo de medida 105° mede $(\sqrt{3} + 1)$ cm, é correto afirmar que a área do triângulo mede, em cm^2 :

- A) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$.
 B) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + 3$.
 C) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3)$.
 D) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 E) $2 + \sqrt{3}$.

Questão 51 – Alternativa A

Solução: A alternativa A está correta.

Seja ABC o triângulo, com $\angle B = 105^\circ$ e $\angle C = 30^\circ$. Como a soma dos ângulos de um triângulo é sempre igual a 180° , segue que $\angle A = 45^\circ$. Também, $AC = \sqrt{3} + 1$. A partir disso, temos duas alternativas de solução:

- i. Pela lei dos senos, temos $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$. As fórmulas trigonométricas de adição de arcos nos dão $\sin 105^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$,

daí

$$BC = AC \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = 2.$$

Por fim, a fórmula do seno para a área de triângulos nos dá

$$A(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1)$$

ii. Se H é o pé da altura baixada de B à reta suporte do lado AC , então $\angle B > 90^\circ$ garante que H está sobre o lado AC . O triângulo ABH é então retângulo e isósceles; sendo $AH = BH = x$, temos $CH = \sqrt{3} + 1 - x$, e assim

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \frac{BH}{CH} = \frac{x}{\sqrt{3} + 1 - x},$$

o que nos dá $x = 1$. Logo, $A(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1)$.

52. Seja $A = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 10^{12}\}$, em que $\mathbb{N}$ indica o conjunto dos números naturais. O número de elementos de A que não são quadrados perfeitos ou cubos perfeitos é igual a:

- A) 10^6 .
- B) $10^{12} - 10^6 - 10^4 + 10^2$.
- C) $10^{12} - 10^6 + 10^4 - 10^2$.
- D) $10^{12} + 10^6 + 10^4 + 10^2$.
- E) $10^6 + 10^4 + 10^2$.

Questão 52 – Alternativa B

Solução: A alternativa **B** está correta.

Em tudo o que segue, denotamos por $\# X$ o número de elementos de um conjunto finito X . Se

$$A = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 10^{12}\}, \quad B = \{x \in A; x \text{ é quadrado perfeito}\} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, (10^6)^2\}$$

e $C = \{x \in A; x \text{ é cubo perfeito}\} = \{1^3, 2^3, 3^3, \dots, (10^4)^3\}$, queremos calcular $k =$

$\#(A - (B \cup C))$. Como $(B \cup C) \subset A$, temos $k = \#A - \#(B \cup C)$. Por outro lado temos

$\#(B \cup C) = \#B + \#C - \#(B \cap C)$, de maneira que

$$k = \#A - \#B - \#C + \#(B \cap C).$$

Agora, é imediato que $\#A = 10^{12}$, $\#B = 10^6$, $\#C = 10^4$ e

$$B \cap C = \{x \in A; x \text{ é sexta potência perfeita}\} = \{1^6, 2^6, 3^6, \dots, (10^2)^6\}$$

de maneira que $\#(B \cap C) = 10^2$. Logo,

$$k = 10^{12} - 10^6 - 10^4 + 10^2.$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

