

QUESTÃO 1 (ALTERNATIVA E)

Carlos começou a trabalhar com $41-15=26$ anos. Se y representa o número total de anos que ele trabalhará até se aposentar, então sua idade ao se aposentar será $26+y$, e portanto $26+y+y=100$. Segue que $y = \frac{100-26}{2} = 37$. Logo ele poderá se aposentar com $26+37=63$ anos.

Outra solução: Atualmente a idade do Carlos mais os anos que ele já trabalhou somam $41+15=56$. Cada ano a mais que o Carlos trabalhar acrescentará 2 a este total. Como $100-56=44$, ele deve trabalhar mais $\frac{44}{2}=22$ anos para atingir a soma 100. Ao final deste período ele terá então $41+22=63$ anos de idade. Equivalentemente, se Carlos trabalhar mais x anos, a soma de sua idade ao se aposentar com os anos trabalhados será de $(41+x)+(15+x)=56+2x$. Para que essa soma seja 100, devemos ter $56+2x=100$, donde $2x=44$ e então $x=22$, como antes.

QUESTÃO 2 (ALTERNATIVA D)

A figura mostra que os discos A e B giram no mesmo sentido, os discos B e C em sentidos opostos e os discos C e D no mesmo sentido. Assim, D gira no sentido anti-horário. Lembramos que o perímetro p de um círculo de raio r é dado por $p=2\pi r$. Como o raio do disco A é quatro vezes o de D, segue que o perímetro de A também é quatro vezes o perímetro de D. Logo D dá quatro voltas para cada volta de A.

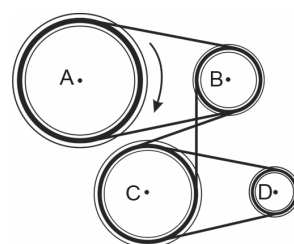
Usamos no argumento acima o fato intuitivo de que os raios dos discos B e C são irrelevantes para a resolução desta questão; é interessante mostrar isto rigorosamente. No caso geral, podemos supor que os raios de A, B, C e D são a, b, c e d , respectivamente.

Se n_a, n_b, n_c e n_d são os números de voltas dados pelos discos A, B, C e D, respectivamente, então

$$n_a \cdot 2\pi a = n_b \cdot 2\pi b$$

$$n_b \cdot 2\pi b = n_c \cdot 2\pi c \Rightarrow n_a \cdot 2\pi a = n_d \cdot 2\pi d \Leftrightarrow \frac{n_d}{n_a} = \frac{a}{d}. \text{ Se } n_a = 1 \text{ então } n_d = \frac{8}{2} = 4$$

$$n_c \cdot 2\pi c = n_d \cdot 2\pi d$$



QUESTÃO 3 (ALTERNATIVA E)

Uma maneira de preencher a tabela de acordo com as condições do enunciado é dada abaixo. Em cada etapa, indicamos com cinza as novas casas preenchidas; o leitor pode justificar cada um dos passos ilustrados. Notamos que a tabela final é única, independente do modo com que ela é preenchida.

1			4
3			
7			
4			3

1	8		4
3	5		
7			
4			3

1	8	6	4
3	5	2	
7			
4			3

1	8	6	4
3	5	2	7
7		5	1
4			3

1	8	6	4
3	5	2	7
7	2	5	1
4	6	8	3

Voltando à questão, vemos que a soma dos números nos quadradinhos cinza marcados no desenho do enunciado é $6+8+5+1=20$.

QUESTÃO 4 (ALTERNATIVA D)

De acordo com a lei de formação dada, a sequência de retângulos, escrita como altura $\times$ base, é da forma

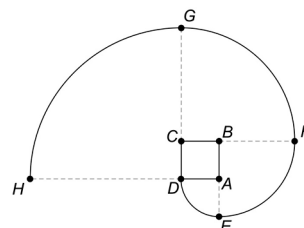
$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 5, 4 \times 7, \dots, n \times (2n-1), \dots$$

Logo o 100° retângulo ($n=100$) é da forma 100×199 , e seu perímetro é $2 \times (100+199) = 598$.

QUESTÃO 5 (ALTERNATIVA A)

O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$; um arco de um quarto dessa circunferência tem então comprimento $\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$. Os raios das circunferências cujos arcos estão sendo considerados no problema são 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm. A soma dos comprimentos desses arcos é então

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(1+2+3+4)\pi}{2} = 5\pi$$



QUESTÃO 6 (ALTERNATIVA E)

Pensando que o terreno fosse quadrado, Ronaldo calculou seu lado como $\sqrt{900} = 30$ metros, e comprou $4 \times 30 = 120$ metros de cerca. Mas ele precisaria de $120 + 2 = 122$ metros de cerca, que é o perímetro do terreno. Se a é o comprimento e b a largura do terreno (supomos $a > b$), temos as equações $2(a + b) = 122$, que expressa o perímetro, e $ab = 900$, que expressa a área. Logo $a + b = 61$ e $ab = 900$, logo a e b são então raízes de $x^2 - 61x + 900 = 0$. As raízes dessa equação são $a = 36$ e $b = 25$, donde $a - b = 11$.

Uma outra maneira de determinar $a - b$ é através da identidade $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, onde

$$(a - b)^2 = 61^2 - 4 \times 900 = 3721 - 3600 = 121$$

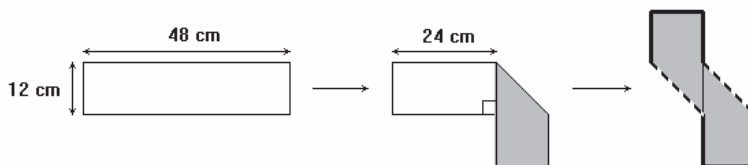
ou seja $a - b = \sqrt{121} = 11$.

QUESTÃO 7 (ALTERNATIVA C)

Como a cada sábado segue um domingo, para que o número de sábados num ano seja maior que o número de domingos é necessário que o último dia desse ano seja sábado. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, um ano bissexto consiste de 52 semanas e 2 dias. Logo, se 31 de dezembro foi um sábado, 2 de janeiro também foi um sábado. Contando de 7 em 7, vemos que 16 de janeiro foi um sábado, donde 20 de janeiro foi uma quarta-feira.

QUESTÃO 8 (ALTERNATIVA E)

Na tira dobrada, à direita na figura, marcamos em traço grosso seis lados do polígono e em traço pontilhado os dois restantes.



Todos os 6 segmentos em traço grosso têm comprimento 12 cm e os 2 pontilhados são diagonais de um quadrado de lado 12 cm, ou seja, medem $\sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ cm. Logo o perímetro do polígono é $6 \cdot 12 + 2 \cdot 12\sqrt{2} = 72 + 24\sqrt{2}$ cm.

QUESTÃO 9 (ALTERNATIVA B)

Até Lúcia completar a primeira volta, m vale 0. No momento em que ela completar essa volta, m passa a valer 1, e só muda de valor no momento em que ela completar a segunda volta, quando passa a valer 2, e assim por diante. Portanto, o gráfico da função é formado por segmentos horizontais, que correspondem aos números naturais do eixo m . Como a cada volta ela percorre a mesma distância, os segmentos horizontais têm todos o mesmo comprimento. O gráfico correto é o da alternativa B.

Mais formalmente, suponhamos que o comprimento da pista seja c metros e que Lúcia acabou de completar k voltas, ou seja, que $m = k$ neste momento. Então ela acabou de correr kc metros, e até ela dar mais uma volta, ou seja, correr $kc + c = (k+1)c$ metros, o valor de m não muda. Podemos então descrever a função m pela expressão $m(x) = k$ se $kc \leq x < (k+1)c$, cujo gráfico é como na alternativa (B).

QUESTÃO 10 (ALTERNATIVA D)

Sejam x e y os números que Pedrinho colocou, respectivamente, nos cantos superior esquerdo e superior direito da tabela. Então $\frac{x+y}{2} = 7$, donde $y = 14 - x$. Do mesmo modo segue que o número que ele colocou no canto inferior esquerdo foi $18 - x$.

x	7	$14 - x$
9	$\frac{x+20}{2} = 16 - x$	
$18 - x$		20

Finalmente, o número que ele colocou no centro da tabela pode ser escrito de duas maneiras:

- a média de x e 20, que é $\frac{x+20}{2}$, e
- a média de $14 - x$ e $18 - x$, que é $\frac{(14-x) + (18-x)}{2} = 16 - x$.

Obtemos então a equação $\frac{x+20}{2} = 16 - x$, cuja solução é $x = 4$. Com isso, podemos completar a tabela e obtemos

4	7	10
9	12	15
14	17	20

de modo que a soma procurada é $4 + 15 = 19$.

QUESTÃO 11 (ALTERNATIVA B)

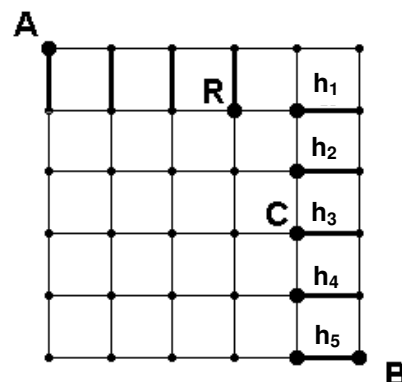
Como $535 = 11 \times 46 + 29$, vemos que 11 ônibus são insuficientes para o passeio. Por outro lado, de $13 \times 46 = 598$ vemos que se o número de ônibus fosse maior ou igual a 13 o número de professores seria no mínimo $598 - 535 = 63$, o que não é possível pois em cada ônibus há no máximo 2 professores. Logo o passeio foi feito com 12 ônibus e o número de professores é $12 \times 46 - 535 = 17$. Como cada ônibus tem 1 ou 2 professores e 17 dividido por 12 tem quociente 1 e resto 5, concluímos que o número de ônibus com 2 professores é 5.

Outra solução: Sejam x o número de ônibus com 1 professor (nesses ônibus há 45 alunos) e y o número de ônibus com 2 professores (nesses ônibus há 44 alunos). Logo, $45x + 44y = 535$. Para resolver essa equação, observe que como x e y são inteiros positivos, y tem que ser um múltiplo de 5 menor que 15 (porque $15 \times 44 > 535$), isto é, y vale 5 ou 10. Substituindo esses valores na equação, obtemos $y = 5$.

QUESTÃO 12 (ALTERNATIVA E)

Para ir de A até R a formiguinha deve escolher um dos quatro segmentos verticais em traço mais grosso na primeira linha da figura. Uma vez escolhido esse segmento, há um único caminho de A até R que passa por ele. Desse modo, a formiguinha pode ir de A até R de quatro maneiras diferentes. Para ir de R a B, ela deve escolher um dos segmentos horizontais h_1, h_2, h_3, h_4 e h_5 na última coluna para chegar ao lado direito da figura, após o que só há uma maneira de chegar até B. Se ela escolher, por exemplo, o segmento h_3 , ela deve ir de R até C, o que pode ser feito de três maneiras diferentes. Repetindo esse raciocínio para os outros pontos concluímos que ela pode ir de R até B de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de ir de A até R é $4 \times 15 = 60$.

Podemos também usar as letras b e d para dizer que a formiguinha percorre um segmento para baixo ou para direita, respectivamente. Um caminho de A até R é então uma sequência de um b e três d 's; a formiguinha deve então escolher em qual das quatro posições colocar o b , donde há 4 desses caminhos. Analogamente, um caminho de R até B consiste de uma sequência de quatro b 's e dois d 's; a formiguinha deve escolher onde colocar os dois d 's nas seis posições disponíveis. A primeira posição para o d pode ser escolhida de 6 modos e a segunda de 5, o que nos leva a 6×5 modos de fazer essas duas escolhas. No entanto, ao fazer isto estamos



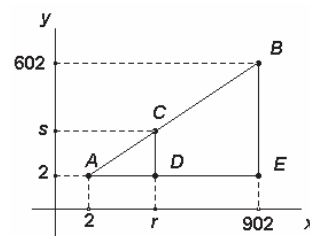
contando cada modo de posicionar os d 's duas vezes, uma para cada ordem de escolha das posições; o número correto de possibilidades para o caminho de R a B é, portanto, igual a $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ (os caminhos de R a B podem também ser contados usando diretamente a fórmula $\binom{6}{2} = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$). Desse modo, a formiguinha tem $4 \times 15 = 60$ maneiras diferentes para ir de A até B passando por R.

QUESTÃO 13 (ALTERNATIVA E)

Seja C um ponto de coordenadas (r, s) no segmento AB , como na figura. Da semelhança dos triângulos ADC e AEB concluímos que

$$\frac{r-2}{s-2} = \frac{902-2}{602-2} = \frac{3}{2},$$

ou seja, $3s - 2r = 2$. Como queremos que r e s sejam inteiros, segue dessa equação que s é par. Uma vez assim escolhido s , o valor de r fica determinado, e desse modo obtemos todos os pontos de coordenadas inteiras no segmento AB . Como existem 301 números pares de 2 a 602, inclusive esses, segue que a alternativa correta é (E).



QUESTÃO 14 (ALTERNATIVA C)

Como os retângulos $AEGF$ e $FGCD$ têm bases iguais e a área de $FGCD$ é três vezes a de $AEGF$, segue que $CG = 3GE$. Logo a razão de semelhança entre os triângulos CEB e CGH é dada por

$$\frac{CE}{CG} = \frac{CG + GE}{CG} = \frac{3GE + GE}{3GE} = \frac{4}{3}$$

Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos

$$\text{área}(CEB) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \text{área}(CGH) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 27 = 48$$

donde a área do trapézio $EBGH$ é $48 - 27 = 21 \text{ cm}^2$.

QUESTÃO 15 (ALTERNATIVA A)

Cada uma das três pessoas, em princípio, pode beber água ou suco, logo há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para considerar, conforme a tabela.

	Ari	Bruna	Carlos
1	água	água	água
2	suco	água	água
3	água	suco	água
4	suco	suco	água
5	água	água	suco
6	suco	água	suco
7	água	suco	suco
8	suco	suco	suco

Devemos agora analisar as condições do problema para decidir qual das possibilidades é a correta. A primeira condição (se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água) elimina as possibilidades 3 e 8. A segunda condição (se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco) elimina a possibilidade 2. A terceira condição (se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água) elimina as possibilidades 4 e 6. Até o momento, restam as possibilidades 1, 5 e 7.

	Ari	Bruna	Carlos
1	água	água	água
5	água	água	suco
7	água	suco	suco

e como apenas um deles pede sempre a mesma bebida, chegamos a Ari, que sempre pede água.

QUESTÃO 16 (ALTERNATIVA A)

Denotemos por f a função pedida. Sendo N o ponto médio do segmento AE , vamos considerar três outros pontos P , Q e R , que representam possíveis posições de partida da formiguinha. Para qualquer um desses pontos, sua distância ao ponto A será denotada por x . Temos três situações:

1ª) a formiguinha parte de um ponto P entre A e N . Nesse caso o menor caminho é:

$P \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow M$. Observe que se $x=AP$ aumenta (P se aproxima de N), o caminho a ser percorrido também aumenta do mesmo comprimento. Isso significa que f é **crescente** entre A e N (e que seu gráfico, neste trecho, é um segmento de reta de inclinação igual a 1).

2ª) a formiguinha parte de um ponto Q entre N e E . Nesse caso o menor caminho é: $Q \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow M$. Observe que se $x=AQ$ aumenta (Q se aproxima de E), o caminho a ser percorrido diminui do mesmo comprimento. Isso significa que f é **decrescente** entre N e E (e que seu gráfico, neste trecho, é um segmento de reta de inclinação igual a -1).

3ª) a formiguinha parte de um ponto R entre E e B . Nesse caso o menor caminho é: $R \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow M$. Observe que se $x=AR$ aumenta (R se aproxima de B), o caminho a ser percorrido também aumenta do mesmo comprimento. Isso significa que f é **crescente** entre E e B (e que seu gráfico, neste trecho, é um segmento de reta de inclinação igual a 1).

Resumindo: entre A e B a função f cresce, decresce e torna a crescer (sempre tendo como gráfico um segmento de reta). Apenas a alternativa (A) mostra esse comportamento.

Outra solução: Na figura, marcamos o ponto médio N do segmento AE e três outros pontos P , Q e R , que representam possíveis posições de partida da formiguinha nos segmentos AN , NE e EB , respectivamente. Para qualquer um desses pontos, sua distância ao ponto A será denotada por x e vamos adotar o lado do quadrado como unidade de comprimento.

Se a formiguinha sai de P , o trajeto mais curto passa por A e C , como indicado pelas flechas. Nesse caso, a formiguinha vai andar

$$PA + AC + CM = x + 1 + \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2} \text{ unidades de comprimento.}$$

Se a formiguinha sair de N , não faz diferença ela passar por A e C ou por E e D , pois em qualquer caso ela vai andar $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$ unidades de comprimento. Se ela sai de Q , o trajeto mais curto passa por E e D , e ela vai andar

$$QE + ED + DM = (1 - x) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - x \text{ unidades de comprimento.}$$

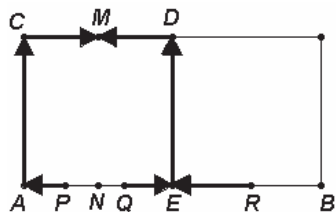
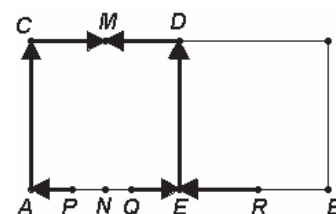
Finalmente, se ela sai de R ela vai andar

$$RE + ED + DM = (x - 1) + 1 + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \text{ unidades de comprimento.}$$

Desse modo, a função que representa a menor distância que a formiguinha deve andar de algum ponto do segmento AB , à distância x do ponto A , até chegar ao ponto M , é dada pela função

$$y = \begin{cases} x + \frac{3}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - x, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x + \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

cujo gráfico é o da alternativa (A).

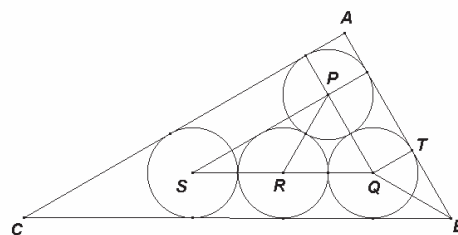


QUESTÃO 17
(ALTERNATIVA B)

Notamos primeiro que o triângulo PQR é equilátero de lado 2 cm. Como o segmento RS também mede 2 cm, o triângulo PRS é isósceles de base PS . O ângulo $\widehat{PRS}$ mede 120° , pois ele é externo ao triângulo PRQ , igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, cada um medindo 60° . Logo cada um dos ângulos $\widehat{RSP}$ e $\widehat{RPS}$ mede 30° , e concluímos que o triângulo PQS é retângulo em P , com $\widehat{PQS} = 60^\circ$ e $\widehat{PSQ} = 30^\circ$. Logo o triângulo ABC é retângulo em A com $\widehat{ABC} = 60^\circ$ e $\widehat{ACB} = 30^\circ$, pois seus lados são paralelos aos do triângulo PQS . Além disso, seu menor lado é AB , oposto ao menor ângulo $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Para calcular o comprimento do lado AB , basta calcular BT , pois claramente $AT = 3$ cm. Notamos que o triângulo QBT é retângulo em T . Como BQ é bissetriz de $\widehat{ABC}$, segue que $\widehat{TBQ} = 30^\circ$. Como $QT = 1$ cm, segue que $BQ = 2$ cm, e o teorema de Pitágoras nos dá

$$BT = \sqrt{QB^2 - QT^2} = \sqrt{3}, \text{ donde } AB = 3 + \sqrt{3}.$$



QUESTÃO 18
(ALTERNATIVA D)

Notamos primeiro que se um estojo recebe duas etiquetas então suas três canetas têm a mesma cor, logo esse estojo vai receber as três etiquetas; ou seja, um estojo recebe apenas uma das ou as três etiquetas, nunca apenas duas delas. No dia descrito no enunciado, foram usadas $120 + 150 + 200 = 470$ etiquetas, das quais $470 - 200 = 270$ foram para estojos que receberam três etiquetas. Logo o número de estojos que receberam três etiquetas foi de $\frac{270}{3} = 90$, e, assim, o número total de estojos montados nesse dia foi de $200 + 90 = 290$.

QUESTÃO 19
(ALTERNATIVA C)

Como $\frac{2}{5}$ do número de alunos baianos é um número inteiro e $\frac{2}{5}$ é uma fração irredutível, concluímos que o número de baianos é múltiplo de 5. Do mesmo modo concluímos que o número de mineiros é múltiplo de 7. Os múltiplos de 5 menores do que 31 são 5, 10, 15, 20, 25 e 30 e os múltiplos de 7 menores que 31 são 7, 14, 21, 28 (não incluímos o 0 entre os múltiplos pois o enunciado diz que há tanto baianos como mineiros no ônibus). Como 31 é a soma do número de baianos com o número de mineiros, a única possibilidade é que o ônibus tenha 10 baianos e 21 mineiros. Como $\frac{2}{5}$ do número de alunos baianos é de homens, segue que $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ é de mulheres. Logo o total de mulheres no ônibus é

$$\frac{3}{5} \times 10 + \frac{3}{7} \times 21 = 6 + 9 = 15$$

Observação: É importante notar que a irredutibilidade das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$ é essencial no argumento acima.

Sabemos, por exemplo, que $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ e que $\frac{6}{14} \times 21 = 9$ mas 14 não é um divisor de 21.

QUESTÃO 20
(ALTERNATIVA D)

Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras diferentes, listadas abaixo:

1. cara, cara, cara – probabilidade $\frac{1}{8}$
2. cara, cara, coroa – probabilidade $\frac{1}{8}$
3. cara, coroa – probabilidade $\frac{1}{4}$
4. coroa, cara – probabilidade $\frac{1}{4}$
5. coroa, coroa – probabilidade $\frac{1}{4}$

Ele termina com coroa nas alternativas 2, 3 e 5.

Como as alternativas acima são mutuamente exclusivas, a probabilidade de sua última jogada ser coroa é $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

