

PROVA DE MATEMÁTICA

PISM II – Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

Questão 1: Esta questão se destina a estabelecer uma demonstração para a fórmula

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

a) No círculo trigonométrico ao lado, observe os triângulos HFB e HCO e mostre que os ângulos α e θ são congruentes.

Solução:

O ponto H é o ponto de interseção dos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{CB}$, sendo então os ângulos $\angle FHB$ e $\angle CHO$ iguais, pois são opostos pelo vértice. Logo, nos triângulos HFB e HCO:

$$\angle FHB = \angle CHO \text{ e } \angle HFB = \angle HCO = 90^\circ.$$

Logo os triângulos HFB e HCO são semelhantes e portanto, $\alpha = \theta$.

b) Mostre que $GB = \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

Solução:

No triângulo retângulo BGF, GB é o cateto adjacente ao ângulo θ . Então $GB = BF \cdot \cos\theta$. Como $\alpha = \theta$, então $\cos\theta = \cos\alpha$. Agora, no triângulo retângulo OFB, BF é o cateto oposto ao ângulo β . Então $BF = OB \cdot \sin\beta = 1 \cdot \sin\beta = \sin\beta$.

Portanto,

$$GB = BF \cdot \cos\theta = \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

c) Admitindo que já tenha sido provado que $FD = \sin\alpha \cdot \cos\beta$, conclua que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

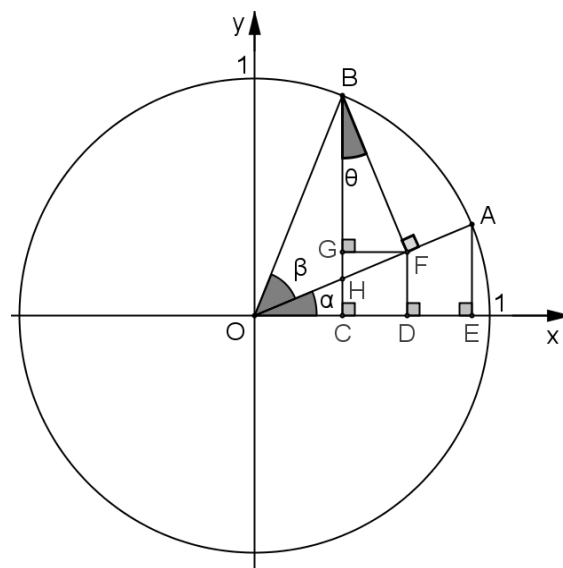
Solução:

No triângulo OCB, retângulo em C, o ângulo oposto ao cateto CB é $\alpha + \beta$. Logo:

$$CB = OB \cdot \sin(\alpha + \beta) = 1 \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Como os ângulos do polígono CDFG são retos, este polígono é um retângulo e daí $CG = FD = \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

Portanto:



$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = CB = CG + GB = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

d) Calcule o valor de $\operatorname{sen}75^\circ$.

Solução:

Temos que:

$$\operatorname{sen}75^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos45^\circ + \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos30^\circ$$

$$\operatorname{sen}75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})$$

Questão 2: Um artesão, para pintar a superfície de esferas de raio 2 cm, estima gastar $0,05 \text{ cm}^3$ de tinta por cada cm^2 de superfície. A tinta a ser utilizada é vendida em latas em forma de cilindro circular reto, cujo diâmetro mede 4 cm e cuja altura mede 5 cm. Nessa questão, despreze todas as espessuras envolvidas.

a) Qual é o número mínimo de latas de tinta necessário para pintar 500 esferas?

Solução:

Sendo $r = 2 \text{ cm}$ o raio da esfera, a área da superfície de cada esfera é:

$$S_e = 4\pi r^2 = 4\pi 2^2 = 16\pi \text{ cm}^2.$$

Como gasta-se $0,05 \text{ cm}^3$ de tinta para pintar cada cm^2 de superfície, para pintar cada esfera serão gastos:

$$T_e = 0,05 \cdot 16\pi = 0,8\pi \text{ cm}^3 \text{ de tinta.}$$

Sendo $R = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$ o raio e $h = 5 \text{ cm}$ a altura da lata de tinta, o volume de cada lata é:

$$V_L = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \text{ cm}^3.$$

A razão entre o volume de tinta necessário para pintar as 500 esferas e o volume de cada lata de tinta é:

$$\frac{500 \cdot T_e}{V_L} = \frac{500 \cdot 0,8\pi}{20\pi} = 20.$$

Portanto, serão necessárias 20 latas de tinta para pintar as 500 esferas.

b) Cada esfera será acondicionada em uma caixa cúbica cujas arestas medem 5 cm. O espaço interno da caixa, não ocupado pela esfera, será totalmente preenchido por um material de proteção. Qual é a medida do menor volume desse material necessário para acondicionar as 500 esferas?

Solução:

Sendo V_c e V_e os volumes da caixa e da esfera, respectivamente, temos que:

$$V_c = 5^3 = 125 \text{ cm}^3 \text{ e } V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

O volume de material de proteção necessário em cada caixa será a diferença:

$$V_c - V_e = 125 - \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Portanto, o volume de material de proteção necessário para acondicionar as 500 esferas é:

$$500 \cdot \left(125 - \frac{32}{3}\pi \right) \text{ cm}^3.$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

