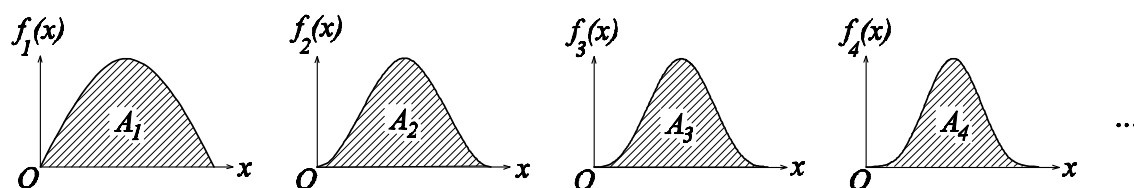


MATEMÁTICA

Questões de 01 a 12

01. Considere a sequência de funções $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin^2 x$, $f_3(x) = \sin^3 x$, ..., $f_n(x) = \sin^n x$, ... e as áreas A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n , ..., definidas pelos respectivos gráficos no intervalo $[0, \pi]$.



Um aluno de Cálculo, motivado pelas inúmeras aplicações dessa disciplina, demonstrou que:

$$A_n = \begin{cases} \frac{4\pi(n-1)!}{n 2^n \left[\left(\frac{n-2}{2} \right)! \right]^2} & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{2^n \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2}{n!} & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Calcule A_1 e A_4 .

$$A_1 = \frac{2^1 \left[\left(\frac{1-1}{2} \right)! \right]^2}{1!} = \frac{2(0!)^2}{1} = \frac{2(1)^2}{1} = 2$$

$$A_4 = \frac{4\pi(4-1)!}{4 \times 2^4 \left[\left(\frac{4-2}{2} \right)! \right]^2} = \frac{4\pi(3!)}{4 \times 16(1!)^2} = \frac{4\pi \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 16 \times 1} = \frac{3\pi}{8}$$

02. Considere que as funções logarítmicas envolvidas na equação a seguir são reais e de variável real.

$$2\log_{100}(3-x) - \log_{0,1}(2-x) = \log 6 + \log 6 \times \log_6 7$$

Se a é raiz dessa equação, então calcule $\log_6 |a-2|$.

Condição de existência: $\begin{matrix} 3-x > 0 \\ 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \end{matrix}$

Para resolver a equação, devemos passar os logaritmos para a base 1° (mudança de base):

$$2 \frac{\log(3-x)}{\log_{100}} - \frac{\log(2-x)}{\log_{0,1}} = \log 6 + \log 6 \times \frac{\log 7}{\log 6}$$

$$\text{Mas, } \log_{100} = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

$$\log_{0,1} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

$$\log(3-x) + \log(2-x) = \log 6 + \log 7$$

$$\log(3-x)(2-x) = \log 42$$

$$(3-x)(2-x) = 42 \Rightarrow 6 - 3x - 2x + x^2 = 42$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

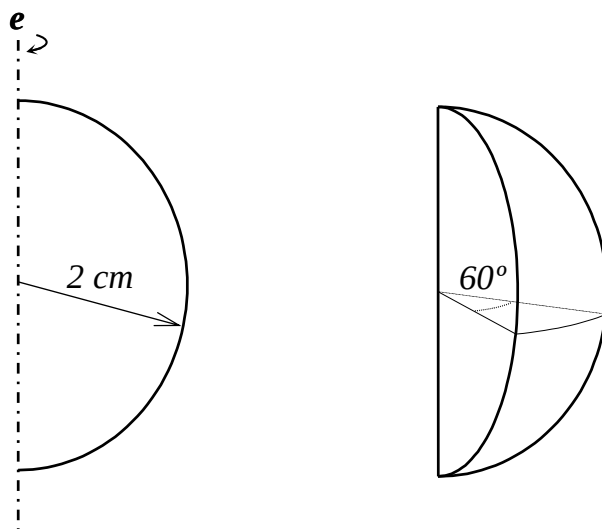
$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 9$$

$$\text{Se } \rightarrow x < 2 \Rightarrow a = -4 (\text{Não})$$

$$\log_6 |a-2| = \log_6 |-4-2| = \log_6 6 = 1$$

03. Uma cunha esférica é determinada pela revolução de 60° do semicírculo a seguir, de raio 2 cm , em torno do eixo e .



Calcule a área total e o volume desta cunha.

$$\text{Volume de esfera: } V_l = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (2)^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{Área da superfície esférica: } A_l = 4\pi R^2 = 4\pi (2)^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$60^\circ = \frac{1}{6} (360^\circ)$$

$$\text{Volume da cunha: } V_c = \frac{1}{6} \left(\frac{32\pi}{3} \right) = \frac{16\pi}{9} \text{ cm}^3$$

$$\text{Área do fuso: } A_f = \frac{1}{6} (16\pi) = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^2$$

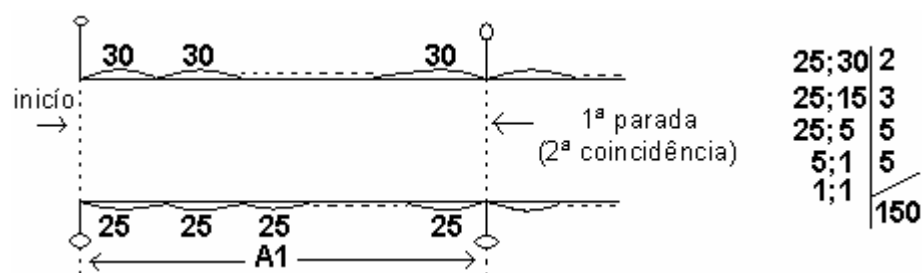
$$\text{Mas, a área da cunha: } A_c = A_f + 2 \left(\frac{\pi R^2}{2} \right) \Rightarrow A_c = \frac{8\pi}{3} + \pi (2)^2 = \frac{8\pi}{3} + 4\pi = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}^2$$

04. Uma rua em linha reta, com 1200 metros de comprimento, foi arborizada com ipês do lado direito e flamboyants do lado esquerdo. Os ipês foram plantados de 25 em 25 metros e os flamboyants de 30 em 30 metros. No início da rua, foi plantada uma árvore de cada espécie.

Uma pessoa caminhou por essa rua partindo do seu início e parou para descansar sempre que ocorreu coincidência de espécies plantadas, uma em cada lado da rua.

Pergunta-se:

A) A que distância do início da rua ocorreu a primeira parada?



A_1 é múltiplo de 25; a_1 é múltiplo de 30 e, por ser a 2ª coincidência (1ª parada), é o menor possível $(a_1 > 0) \Rightarrow a_1 = mmc\{25, 30\} = 150m$

B) Quantas vezes a pessoa parou para descansar?

$$a_1 = 150m \quad (1^a \text{ parada})$$

$$a_2 = 300m \quad (2^a \text{ parada})$$

$$a_3 = 450m \quad (3^a \text{ parada})$$

$$a_n = 1200m \quad (n^o \text{ parada})$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow r = a_2 - a_1 = 150m$$

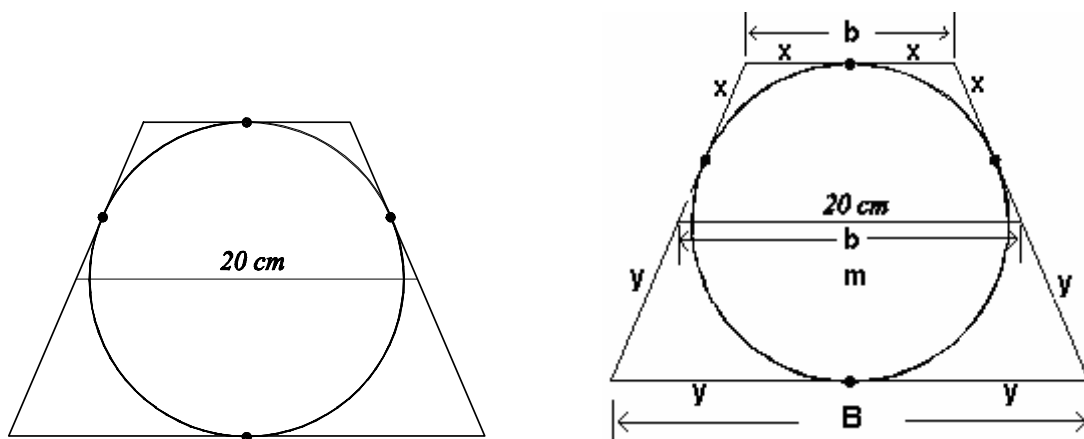
$$\Rightarrow 1200 = 150 + (n-1)150$$

$$1200 = \cancel{150} + 150n - \cancel{150}$$

$$n = 8$$

Conclusão: parou para descansar 8 vezes.

05. Um trapézio isósceles de base média medindo 20 cm está circunscrito a uma circunferência.

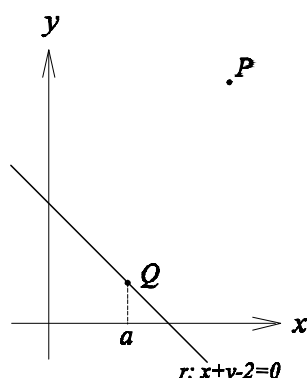


Determine o perímetro deste trapézio.

$$b_m = \frac{b + B}{2} \Rightarrow b + B = 40 \Rightarrow 2x + 2y = 40 \Rightarrow 4x + 4y = 80$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro} = 4x + 4y = 80\text{ cm}$$

07. Num sistema de coordenadas cartesianas, localizam-se o ponto $P(3,4)$ e a reta r de equação $x + y - 2 = 0$. Seja Q o ponto da reta r de abscissa a .



Determine:

- A) A medida do segmento $\overline{PQ}$ em função de a .

No ponto Q,

$$x = a \Rightarrow a + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - a$$

$$PQ = \sqrt{(3-a)^2 + (4-2+a)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(3-a)^2 + (2+a)^2}$$

$$PQ = \sqrt{9 - 6a + a^2 + 4 + 4a + a^2}$$

$$PQ = \sqrt{2a^2 - 2a + 13}$$

- B) O valor de a para que a medida do segmento $\overline{PQ}$ seja a mínima possível, em seguida, o valor desta medida mínima.

(Sugestão: Sendo $m > 0$, $\sqrt{m}$ será mínima quando m for mínimo)

PQ será mínima quando: $(PQ)^2 = 2a^2 - 2a + 13$ for mínimo

$$(PQ)^2 \text{ é mínima para } a = \frac{-B}{2A} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (PQ)^2 \text{ mínima} &= 2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 13 = \frac{1}{2} - 1 + 13 = \frac{1}{2} - 1 + 13 = \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2} \\ PQ &= \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

09. Maria e sua irmã Vera foram com seu irmão mais novo à casa do seu tio. Lá, encontraram uma balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 70 kg . Dessa forma, eles se pesaram dois a dois e seus pesos combinados foram:

- Maria e Vera: 99 kg
- Maria e o irmão: 81 kg
- Vera e o irmão: 74 kg

Determine o peso de cada um dos irmãos.

$$\begin{cases} x + y = 99 \\ x + z = 81 \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 254 \therefore x + y + z = 127 \\ y + z = 74 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 127 - 99 = 28\text{ kg} \Rightarrow (\text{Irmão}) \\ y = 127 - 81 = 46\text{ kg} \Rightarrow (\text{Vera}) \\ x = 127 - 74 = 53\text{ kg} \Rightarrow (\text{Maria}) \end{cases}$$

10. Considere o polinômio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que:

- $P(x) = P(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $P(1) = 2$
- $P(0) = 6$

Determine:

A) Os valores de a , b , c e d .

$$\begin{aligned} P(x) = P(-x) &\Rightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d \\ &\Rightarrow a = -a \\ &\Rightarrow c = -c \Rightarrow a = c = 0 \\ P(x) &= x^4 + bx^2 + d \\ P(1) = 2 &\Rightarrow 1 + b + d = 2 \\ P(0) = 6 &\Rightarrow 0 + 0 + d = 6 \Rightarrow d = 6 \rightarrow b = -5 \\ P(x) &= x^4 - 5x^2 + 6 \end{aligned}$$

B) A soma dos quadrados das raízes de $P(x)$.

$$\begin{aligned}
 P(x) = 0 &\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 = y \\
 y^2 - 5y + 6 = 0 &\therefore y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \therefore y_1 = 2 \rightarrow y_2 = 3 \\
 x^2 = 2 &\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \rightarrow x_2 = \sqrt{2} \\
 x^2 = 3 &\Rightarrow x_3 = -\sqrt{3} \rightarrow x_4 = \sqrt{3} \\
 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 2 + 2 + 3 + 3 = 10
 \end{aligned}$$

- 11.** Viajando 8 horas por dia, durante 6 dias, com uma velocidade média de $v \text{ km/h}$, um ciclista faz certo percurso. Sabe-se que ele poderia fazer o mesmo percurso se viajasse 5 horas por dia, durante 8 dias, com uma velocidade média 4 km/h superior à velocidade v . Assim sendo, calcule a velocidade v .

1º modo:

$$\begin{array}{ccc}
 8 \text{ h/d} & \downarrow & 6 \text{ d} \\
 5 \text{ h/d} & \downarrow & 8 \text{ d}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v \text{ km/h} \\
 (v+4) \text{ km/h}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \uparrow
 \end{array}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{8}{6} = \frac{v}{v+4} \therefore \frac{5}{6} = \frac{v}{v+4} \therefore 6v = 5v + 20 \therefore v = 20 \text{ km/h}$$

2º modo: distância = velocidade média x tempo

$$d = V_m \times t$$

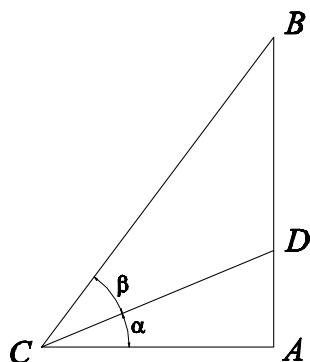
$$d = 48 \times v \therefore d = 40(v + 4)$$

$$48v = 40v + 160$$

$$8v = 160$$

$$v = 20 \text{ km/h}$$

12. Nos triângulos a seguir, o ângulo $\hat{A}$ é reto. A medida do segmento $\overline{CB}$ é 20 cm , a do segmento $\overline{BD}$ é 11 cm e a do segmento $\overline{DA}$ é 5 cm .



Determine o valor de $\text{tg } \beta$. (Sugestão: Utilize a identidade $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}$)

$$(CA)^2 = (CB)^2 - (AB)^2 \Rightarrow (CA)^2 = (20)^2 - (11+5)^2$$

$$(CA)^2 = 400 - 256 \Rightarrow (CA)^2 = 144 \Rightarrow CA = 12\text{ cm}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{AD}{CA} = \frac{5}{12} \therefore \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\frac{5}{12} + \text{tg } \beta}{1 - \frac{5}{12} \text{tg } \beta}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{5 + 12\text{tg } \beta}{12 - 5\text{tg } \beta} \Rightarrow 36\text{tg } \beta + 15 = 48 - 20\text{tg } \beta$$

$$56\text{tg } \beta = 33 \therefore \text{tg } \beta = \frac{33}{56}$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

