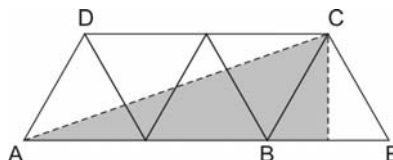
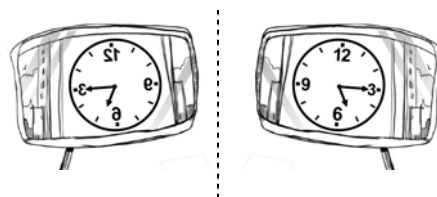


QUESTÃO 1

ALTERNATIVA A

Na imagem que aparece no espelho do Benjamim, o ponteiro dos minutos aponta para o número 3, enquanto que o ponteiro das horas está entre o algarismo 6 e o traço correspondente ao algarismo 5, mais próximo deste último. Deste modo, o relógio marcava 5h 15min.

Outra maneira de enxergar o resultado é imaginar que a imagem que aparece no espelho do Benjamim voltará ao normal se for novamente refletida em um espelho. Fazemos isto na figura ao lado e vemos imediatamente que a hora marcada era 5h 15min.



QUESTÃO 2

ALTERNATIVA C

Podemos decompor a figura no paralelogramo $ABCD$ e no triângulo BEC . Em cada uma destas figuras a área sombreada corresponde a metade da área, e assim a área sombreada na figura original é a metade da área total.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA B

A quantidade de água que Daniela gastava por semana (isto é, em 7 dias) em cada atividade era:

- lavar roupa: $7 \times 150 = 1050$ litros;
- banho de 15 minutos: $7 \times 90 = 630$ litros;
- lavar o carro com mangueira: $1 \times 100 = 100$ litros.

Assim, ela gastava $1050 + 630 + 100 = 1780$ litros por semana. Com a economia, Daniela passou a gastar semanalmente em cada atividade:

- lavar roupa no tanque: $3 \times 150 = 450$ litros;
- banho de 5 minutos: $7 \times \frac{90}{3} = 7 \times 30 = 210$ litros;
- lavar o carro com balde: $1 \times 10 = 10$ litros,

ou seja, um total de $450 + 210 + 10 = 670$ litros. Portanto, ela passou a economizar por semana $1780 - 670 = 1110$ litros de água.

Podemos também pensar diretamente na economia semanal da Daniela:

- 4 lavagens de roupa: $4 \times 150 = 600$ litros;
- $\frac{2}{3}$ banho por dia: $7 \times \frac{2}{3} \times 90 = 420$ litros;
- substituir a mangueira pelo balde: $100 - 10 = 90$,

o que nos dá o total de $600 + 420 + 90 = 1110$ litros.

QUESTÃO 4

ALTERNATIVA E

A primeira torneira enche $\frac{1}{8}$ tanque/hora e a segunda $\frac{1}{4}$ tanque/hora; as duas juntas enchem então $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

tanque/hora. A primeira torneira, aberta por 2 horas, encheu $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ do tanque, deixando vazio $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ do

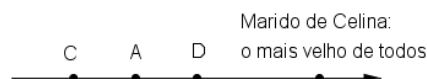
tanque. As duas torneiras juntas levaram então $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = 2$ horas para acabar de encher o tanque, que ficou

cheio 4 horas após o meio dia, ou seja, às 16:00h.

QUESTÃO 5

ALTERNATIVA C

Na figura ao lado, A representa a idade de Arnaldo, C a de Celina e D a de Dalila; a flecha indica o sentido de idade crescente. A ordem das letras C, A e D indica que Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. Logo o esposo de Celina é Beto, que é também o mais velho de todos.



QUESTÃO 6 ALTERNATIVA A

Escrevendo 24 como produto de inteiros positivos de todas as maneiras possíveis, podemos investigar todas as possibilidades para a e b em $a * b = (a+1) \times (b-1) = 24$ e testá-las em $b * a = (b+1) \times (a-1) = 30$ para achar os possíveis valores de a e b . Fazemos isto na tabela a seguir.

$24 =$	a	b	$(b+1) \times (a-1)$
1×24	0	25	não considerar pois $a > 0$
2×12	1	13	0
3×8	2	9	10
4×6	3	7	16
6×4	5	5	25
8×3	7	4	30
12×2	11	3	33
24×1	23	2	46

Logo $a = 7$ e $b = 4$, donde $a + b = 11$.

De modo mais algébrico, podemos resolver este problema como segue. Temos $a * b = (a+1)(b-1) = ab - a + b - 1 = 24$ e $b * a = (b+1)(a-1) = ab + a - b - 1 = 30$. Somando estas duas expressões, obtemos $2ab - 2 = 54$ e segue que $ab = 28$. De modo análogo ao anterior, geramos as possibilidades (1,28), (2,14), (4,7), (7,4), (14,2) e (28,1) para (a,b) e verificamos que apenas $a = 7$ e $b = 4$ satisfazem $a * b = 24$ e $b * a = 30$.

Para aqueles que já sabem resolver equações de segundo grau, notamos que subtraindo $ab - a + b - 1 = 24$ de $ab + a - b - 1 = 30$ obtemos $2a - 2b = 6$, ou seja, $a - b = 3$. Logo $a = b + 3$ e, substituindo em $ab = 28$ temos $b^2 - 3b - 28 = 0$. Esta equação tem raízes $b = 4$ e $b = -7$; como só nos interessa a raiz positiva, temos $b = 4$ e então $a = 7$.

QUESTÃO 7 ALTERNATIVA D

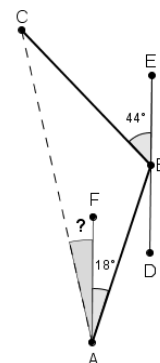
Primeiro observamos que quando o cachorro corre 10 metros o coelho corre 1 metro. Como o cachorro começou 10 metros atrás do coelho, neste momento o coelho está apenas 1 metro à frente. Quando o cachorro corre mais 1 metro, o coelho corre 10 cm, ou seja, o coelho ainda está 10 cm à frente. Finalmente, observamos que se o cachorro corresse mais 1 metro, o coelho correria somente mais 10 cm; logo, em algum momento antes disso, o cachorro alcança o coelho. Assim o coelho é alcançado depois de o cachorro correr 11 metros, mas antes que ele corra 12 metros.

Algebricamente, podemos dizer que se o coelho corre com velocidade v m/s então o cachorro corre com velocidade $10v$ m/s. No instante $T = 0$, o coelho está 10 metros à frente do cachorro; após T segundos, o cachorro correu $10Tv$ metros e o coelho Tv metros, ou seja, o coelho estará na posição $10 + Tv$. O cachorro alcançará o coelho quando $10Tv = 10 + Tv$, ou seja, quando $Tv = \frac{10}{9}$. O cachorro terá então percorrido

$$10 \times \frac{10}{9} = \frac{100}{9} = 11,11... \text{ metros, ou seja, entre 11 e 12 metros.}$$

QUESTÃO 8 ALTERNATIVA B

Como os segmentos AF e ED apontam para o norte, eles são paralelos, e como AB é transversal a AF e a ED segue que $\widehat{DBA} = \widehat{FAB} = 18^\circ$. Logo $\widehat{ABC} = 180^\circ - (44^\circ + 18^\circ) = 118^\circ$. Como $AB = BC$, o triângulo ABC é isósceles; os ângulos iguais $\widehat{ACB}$ e $\widehat{CAB}$ medem então $\frac{1}{2}(180^\circ - 118^\circ) = 31^\circ$. Concluimos então que $\widehat{FAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAF} = 31^\circ - 18^\circ = 13^\circ$.

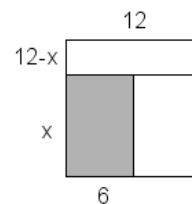


QUESTÃO 9 ALTERNATIVA B

Temos $2^{100} \times 5^{103} = 2^{100} \times 5^{100} \times 5^3 = (2 \times 5)^{100} \times 5^3 = 125 \times 10^{100}$, que é 125 seguido de 100 zeros. A soma dos algarismos deste número é $1 + 2 + 5 = 8$.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA D

Notamos primeiro que os dois retângulos da parte inferior da figura são congruentes, pois possuem o mesmo perímetro e a mesma altura; logo suas bases medem 6 cm. Chamando de x a altura destes retângulos, podemos marcar as medidas como na figura ao lado. O perímetro do retângulo da parte superior da figura é $2 \times [12 + (12 - x)] = 48 - 2x$ e o perímetro do retângulo sombreado é $2 \times (6 + x) = 12 + 2x$. Como os perímetros são iguais, temos $48 - 2x = 12 + 2x$, donde $4x = 36$ e então $x = 9$. Logo a área do retângulo sombreado é $6 \times 9 = 54 \text{ cm}^2$.



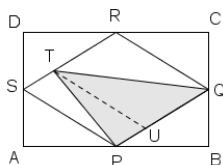
QUESTÃO 11
ALTERNATIVA E

Vamos calcular mais alguns termos da sequência:

$$\underbrace{9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 2, 9, 16, 13, \dots}_{10 \text{ termos}}$$

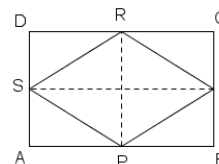
Observamos que a sequência se repete de 10 em 10 termos. Como $2009 = 200 \times 10 + 9$, segue que o 2009º termo da sequência é 15.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A



A figura à direita mostra como decompor o retângulo $ABCD$ em oito triângulos congruentes. Concluímos que a área do quadrilátero $PQRS$ é metade da área do retângulo, ou seja, 20 cm^2 .

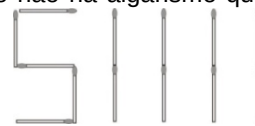
Voltamos agora para a figura do enunciado e traçamos uma paralela TU ao segmento PS . Os triângulos PST e UTP são congruentes, bem como os triângulos UTQ e RQT . Como o triângulo PQT é a união dos triângulos UTP e UTQ , segue que sua área é metade da área do quadrilátero $PQRS$, ou seja, 10 cm^2 .



QUESTÃO 13
ALTERNATIVA B

Um número com uma determinada quantidade de algarismos, sendo o primeiro à esquerda diferente de zero, é sempre maior que qualquer número que tenha um algarismo a menos. Por exemplo, 1000 (com quatro algarismos) é maior do que 999 (que tem apenas 3 algarismos). Assim, com exatamente 13 palitos, devemos formar um número que tenha a maior quantidade possível de algarismos, sendo o primeiro à esquerda diferente de 0. Como o 1 é formado pelo menor número de palitos entre todos os algarismos, vemos que para obter o maior número possível com 13 palitos devemos usar tantos algarismos 1 quanto possível.

Não é possível usar 6 algarismos 1, pois neste caso já teríamos usado 12 palitos e não há algarismo que possa ser formado com apenas 1 palito. Pelo mesmo motivo, não é possível usar 5 algarismos 1; não há algarismo formado por 3 palitos. Mas é possível usar 4 algarismos 1; neste caso, usamos 8 palitos e podemos completar o número com um entre os algarismos 2 ou 5, que são formados por 5 palitos. Neste caso, devemos escolher o 5, que nos permite formar o número 51111 com 13 palitos. A soma dos algarismos deste número é $5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$.



QUESTÃO 14
ALTERNATIVA B

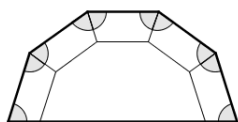
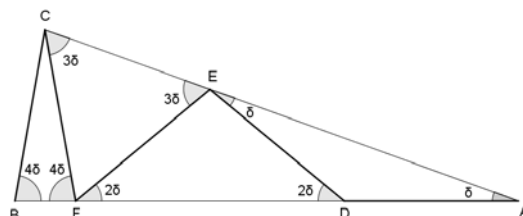
Temos $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{29}{30}$. Como a fração $\frac{29}{30}$ é irredutível, segue que bd é um múltiplo de 30. Por outro lado, o único múltiplo de 30 que é o produto de dois fatores entre 1 e 9 é o próprio 30, que é igual a 5×6 . Podemos então supor que $b = 5$ e $d = 6$; voltando à expressão original, obtemos $6a + 5b = 29$. A única solução desta equação em inteiros entre 1 e 9 é $a = 4$ e $b = 1$, e temos $a + b + c + d = 4 + 5 + 1 + 6 = 16$.



QUESTÃO 15 ALTERNATIVA C

Nesta solução vamos usar repetidamente o resultado de geometria elementar que diz que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Este resultado está ilustrado na figura ao lado e diz que $\alpha = \beta + \gamma$.

Vamos indicar por δ a medida do ângulo $\widehat{BAC}$. Como o triângulo ADE é isósceles, temos $\widehat{DEA} = \delta$. O ângulo $\widehat{EDF}$ é externo ao triângulo ADE , e pelo resultado mencionado acima temos $\widehat{EDF} = \delta + \delta = 2\delta$. Como o triângulo DEF é isósceles temos também $\widehat{EFD} = 2\delta$; o ângulo $\widehat{FEC}$, externo ao triângulo FEA , mede então $2\delta + \delta = 3\delta$. Analogamente, concluímos que $\widehat{CBA} = 4\delta$, e como o triângulo ABC é isósceles segue que $\widehat{BCA} = 4\delta$. Logo $180^\circ = 4\delta + 4\delta + \delta = 9\delta$, donde $\delta = 20^\circ$.



QUESTÃO 16 ALTERNATIVA A

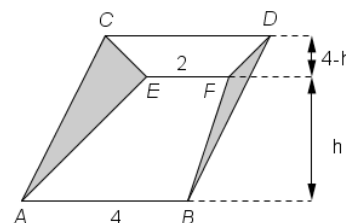
Lembramos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2) \times 180^\circ$. Podemos ver a figura do enunciado como um polígono de 6 lados (em traço mais grosso na figura ao lado); a soma de seus ângulos internos é então $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$. Por outro lado, como os trapézios são congruentes, a soma destes ângulos internos é igual a 10 vezes a medida do ângulo marcado, que vale então $\frac{720^\circ}{10} = 72^\circ$.

QUESTÃO 17 ALTERNATIVA D

Há cinco algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9. Contando apenas números inteiros positivos, existem então 5 números formados por apenas um algarismo ímpar, $5 \times 5 = 25$ números formados por dois algarismos ímpares e $5 \times 5 \times 5 = 125$ números formados por três algarismos ímpares. Assim, existem $5 + 25 + 125 = 155$ números inteiros positivos menores que 1000 formados por algarismos ímpares. O 156° é então 1111 e o 157° é 1113.

QUESTÃO 18 ALTERNATIVA B

Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo $ABCD$ e subtrair as áreas dos trapézios $ABFE$ e $CDFE$. Seja h a altura do trapézio $ABFE$; sua área é então $\frac{AB + EF}{2} h = 3h \text{ cm}^2$. Como a altura do paralelogramo $ABCD$ é 4 cm, a altura do trapézio $CDFE$ é $4 - h$ e sua área é $\frac{CD + EF}{2} (4 - h) = 12 - 3h \text{ cm}^2$. A área do paralelogramo $ABCD$ é 16 cm^2 ; a soma das áreas dos triângulos é então $16 - (3h + 12 - 3h) = 4 \text{ cm}^2$.

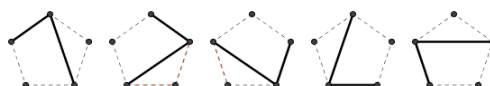


QUESTÃO 19 ALTERNATIVA E

Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.



Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.



Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

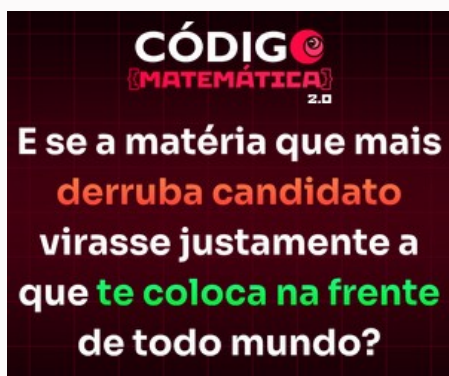
QUESTÃO 20 ALTERNATIVA E

Vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 times que foram eliminados após perder 2 partidas cada um, contamos $56 \times 2 = 112$ derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi $112 + 1 = 113$. Além disso, como não houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

