

01. A sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ tem seus termos dados pela fórmula $a_n = \frac{n+1}{2}$. Calcule a soma dos dez primeiros termos da sequência $(b_n)_{n \geq 1}$, onde $b_n = 2^{a_n}$ para $n \geq 1$.

Comentário da Questão 01

Assunto: Seqüências e progressões.

Solução: A sequência $(b_n)_{n \geq 1}$ é uma PG de termo inicial $b_1 = 2^{a_1} = 2$ e razão $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Portanto, a soma de seus dez primeiros termos é

$$S_{10} = b_1 \left(\frac{q^{10} - 1}{q - 1} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right) = 62(\sqrt{2} + 1).$$

02. A massa crua com que é fabricado um certo tipo de pão é composta de 40% de água. Para obtermos um pão assado de 35 gramas, é necessária uma massa inicial de 47 gramas. Qual o valor aproximado do percentual de água evaporada durante o tempo de preparo desse pão, sabendo-se que a água é a única substância perdida durante esse período?

Comentário da Questão 02

Assunto: Porcentagem.

Solução: A massa evaporada de 12 g corresponde à água que evaporou. Por outro lado, a massa inicial de água era $\frac{4}{10} \cdot 47 = 18,8$ g, de maneira que o percentual de água evaporada é

$$\frac{12}{18,8} \cdot 100\% \cong 63,8\%.$$

03. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ é um paralelepípedo reto-retângulo de bases $ABCD$ e $A_1 B_1 C_1 D_1$, com arestas laterais AA_1 , BB_1 , CC_1 e DD_1 . Calcule a razão entre os volumes do tetraedro $A_1 B C_1 D$ e do paralelepípedo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Comentário da Questão 03

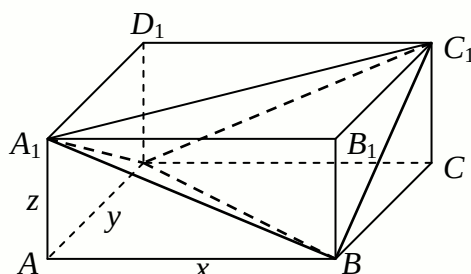
Assunto: Geometria espacial.

Solução: A figura abaixo representa a situação do problema (o vértice imediatamente abaixo de D_1 é o vértice D). Denotando por x , y e z as dimensões do paralelepípedo (também como na figura), temos $AB = CD = A_1 B_1 = C_1 D_1 = x$, $AD = BC = B_1 C_1 = A_1 D_1 = y$ e $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = z$. O volume de $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ é claramente dado por xyz . Quanto ao volume de $A_1 B C_1 D$, temos

$$\begin{aligned} V(A_1 B C_1 D) &= V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) - V(AA_1 B D) - V(B_1 A_1 B C_1) - V(C B C_1 D) - V(D_1 A_1 C_1 D) \\ &= xyz - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{xy}{2} \cdot z = \frac{xyz}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{V(A_1 B C_1 D)}{V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)} = \frac{xyz/3}{xyz} = \frac{1}{3}.$$



04. Encontre as equações das retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -1)$.

Comentário da Questão 04

Assunto: Geometria analítica e equações de segundo grau.

Solução: Sendo m o coeficiente angular da reta tangente, temos que sua equação é $y = mx - 1$. A fim de que tal reta tangencie a parábola, é necessário e suficiente que o sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx - 1 \end{cases}$$

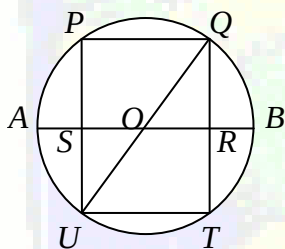
possua uma única solução; para tanto, a equação $x^2 = mx - 1$ deve ter discriminante igual a 0, i.e., $m^2 - 4 = 0$. Há, assim, duas possibilidades:

- $m = 2$, fornecendo a tangente $y = 2x - 1$;
- $m = -2$, fornecendo a tangente $y = -2x - 1$.

05. Seja Γ uma semi-circunferência de diâmetro AB e raio 1. Encontre o maior valor possível para a área de um retângulo $PQRS$ construído de tal modo que R e S estejam sobre AB e P e Q sobre Γ .

Comentário da Questão 05

Assunto: Funções de segundo grau; geometria plana; trigonometria.



Solução 1: Seja $PQTU$ o retângulo de lado PQ e inscrito em Γ . Como a área de $PQRS$ é metade da área de $PQTU$, que por sua vez é o dobro da área de QUT , temos que $PQRS$ e QUT têm áreas iguais, e basta maximizar a área de QUT . Como $QU = 2$, o maior valor possível para a área de QUT será obtido quando a altura relativa a T for a maior possível, i.e., quando TO for perpendicular a QU . Nesse caso, temos

$$A(PQRS) = A(QUT) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Solução 2: Se $\angle QOR = \theta$, então as relações trigonométricas no triângulo QOR nos dão $QR = \sin \theta$ e $OR = \cos \theta$, de modo que a área de $PQRS$ é igual a $(\sin \theta)(2 \cos \theta) = \sin(2\theta)$. Portanto, o valor máximo de tal área é 1, ocorrendo quando $\theta = \pi/4$.

Solução 3: Se $OR = x$ e $QR = y$, então a área de $PQRS$ é igual a $2xy$. Por outro lado, segue do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OQR que $x^2 + y^2 = 1$, e daí

$$2xy = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{x^2-x^4}.$$

Se $z = x^2$, segue da expressão acima para a área que basta maximizar a função de segundo grau $f(z) = z - z^2$ para $0 < z < 1$. É bem sabido que tal função admite $z = 1/2$ como seu único ponto de máximo; ademais, observemos que tal ponto pertence ao intervalo $(0, 1)$, de maneira que o valor máximo desejado é $f(1/2) = 1/4$. Portanto, a área máxima é $2\sqrt{1/4} = 1$.

06. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 2\sin x + \cos(2x)$. Calcule os valores máximo e mínimo de f , bem como os números reais x para os quais f assume tais valores.

Comentário da Questão 06

Assunto: Composição de funções; funções de segundo grau; trigonometria.

Solução: De $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ obtemos $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$. Sendo $g(x) = -2x^2 + 2x + 1$, temos $f = g \circ \sin$, onde $\sin$ denota a função seno. Como tal função tem por imagem o intervalo $[-1, 1]$, os valores máximo e mínimo de f são iguais aos valores máximo e mínimo de g restrita a $[-1, 1]$. Mas o estudo do crescimento de funções de segundo grau garante que a função g assume seu valor máximo para $x = 1/2$, sendo estritamente crescente no intervalo $(-\infty, 1/2]$ e estritamente decrescente no intervalo $[1/2, +\infty)$. Logo:

- i) O valor máximo de f é $g(1/2) = 3/2$, obtido quando $\sin x = 1/2$, quer dizer, quando $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.
- ii) O valor mínimo de f é o menor dentre os números $g(-1) = -3$ e $g(1) = 1$; assim, o valor mínimo de f é -3 , obtido quando $\sin x = -1$, quer dizer, quando $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

07. No plano cartesiano, a hipérbole $xy = 1$ intersecta uma circunferência Γ em quatro pontos distintos A , B , C e D . Calcule o produto das abscissas dos pontos A , B , C e D .

Comentário da Questão 07

Assunto: Geometria analítica; polinômios; funções.

Solução: Se $C(a, b)$ é o centro e $r > 0$ é o raio de Γ , então sua equação cartesiana é $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Os pontos comuns a Γ e à hipérbole são as soluções do sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

de modo que as abscissas de A , B , C e D são soluções da equação $(x - a)^2 + (1/x - b)^2 = r^2$, ou ainda $x^4 - 2ax^3 + (a^2 + b^2 - r^2)x^2 - 2bx + 1 = 0$. Por outro lado, é imediato que as abscissas de A , B , C e D se constituem em todas as raízes da equação polinomial acima; logo, pelas relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações polinomiais, segue que seu produto é igual a 1.

08. Escolhemos cinco números, sem repetição, dentre os inteiros de 1 a 20. Calcule quantas escolhas distintas podem ser feitas, sabendo que ao menos dois dos cinco números selecionados devem deixar um mesmo resto quando divididos por 5.

Comentário da Questão 08

Assunto: Análise combinatória.

Solução: Particionam-se os números de 1 a 20 de acordo com os restos de sua divisão por 5, obtendo-se os conjuntos $\{1, 6, 11, 16\}$, $\{2, 7, 12, 17\}$, $\{3, 8, 13, 18\}$, $\{4, 9, 14, 19\}$, $\{5, 10, 15, 20\}$. Os cinco números escolhidos deixarão restos dois a dois distintos na divisão por 5 se e só se vierem um de cada um desses conjuntos. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, temos 4^5 possibilidades de escolha de cinco números satisfazendo essa condição. Descontando tais possibilidades das $\binom{20}{5}$ escolhas possíveis de cinco números distintos de 1 a 20, obtemos a resposta desejada: $\binom{20}{5} - 4^5 = 14480$.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

