

Gabarito da Prova de Matemática
2ª fase do Vestibular 2009

Questão 01:

(a) Enuncie o Teorema de Pitágoras

Solução: Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

(b) Justifique por que a argumentação abaixo não pode ser considerada uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

Seja ABC um triângulo retângulo em B.

Construa a altura $\overline{BH}$, relativa à hipotenusa.

Dos triângulos AHB e CHB tem-se:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$



A partir dessas igualdades obtém-se:

$$AB^2 + BC^2 = (AH^2 + HB^2) + (BH^2 + HC^2)$$

$$AB^2 + BC^2 = AH^2 + 2HB^2 + HC^2$$

Como $HB^2 = AH \cdot HC$ tem-se:

$$AB^2 + BC^2 = (AH + HC)^2$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Solução: Quando se afirma que:

Dos triângulos AHB e CHB tem-se:

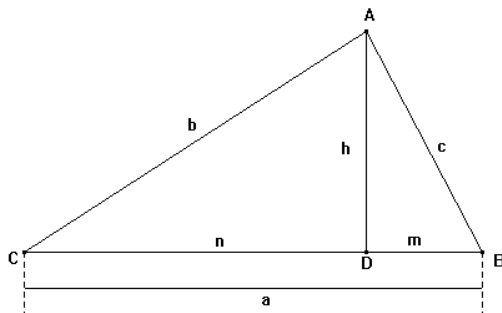
$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

está se utilizando na argumentação o próprio teorema que se deseja demonstrar.

(c) Demonstre o Teorema de Pitágoras.

Solução: Seja ABC um triângulo retângulo em A e $\overline{AD}$ a altura relativa à hipotenusa.



Como $\triangle ADB$ e $\triangle ABC$ são ambos retângulos e possuem o ângulo $\hat{B}$ em comum, tem-se

$$\triangle ADB \approx \triangle ABC \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow am = c^2$$

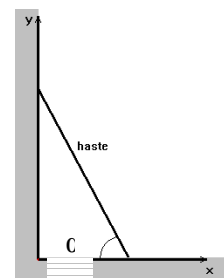
Como $\triangle CDA$ e $\triangle ABC$ são ambos retângulos e possuem o ângulo $\hat{C}$ em comum, tem-se

$$\triangle CDA \approx \triangle ABC \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow an = b^2$$

Portanto $a(m+n) = c^2 + b^2$. Como $m+n = a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

Questão 02:

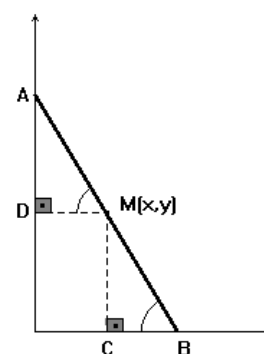
Uma haste, de 4 m de comprimento, está deslizando numa parede, apoiada ao solo. Veja ilustração abaixo.



a) Encontre as coordenadas (x, y) do ponto médio da barra, em função do ângulo α .

Solução: Inicialmente observe que os ângulos $\hat{AMD}$ e $\hat{MBC}$ são correspondentes, logo têm a mesma medida. E ainda, sendo M o ponto médio da haste, $AM = MB = 2$ m.

Como $DM = x$ tem-se, do triângulo ADM, que:



$$\cos \alpha = \frac{DM}{AM} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cos \alpha.$$

Como $MC = y$ tem-se, do triângulo MCB, que:

$$\sin \alpha = \frac{MC}{MB} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2 \sin \alpha.$$

Logo as coordenadas do ponto M são $M(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$.

b) Determine o valor de α para o qual a diferença $y - x$, entre as coordenadas do ponto médio, seja igual a $\sqrt{2}$.

Solução:

$$y - x = 2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha \Rightarrow y - x = 2(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$y - x = \sqrt{2} \Rightarrow 2(\sin \alpha - \cos \alpha) = \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2}{4}$$

Como $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, tem-se:

$$1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pelo contexto, α deve ser um ângulo agudo, portanto deve-se ter $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad

ou $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ rad. Para que $y - x = \sqrt{2} > 0$ devemos ter $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ rad, já que se

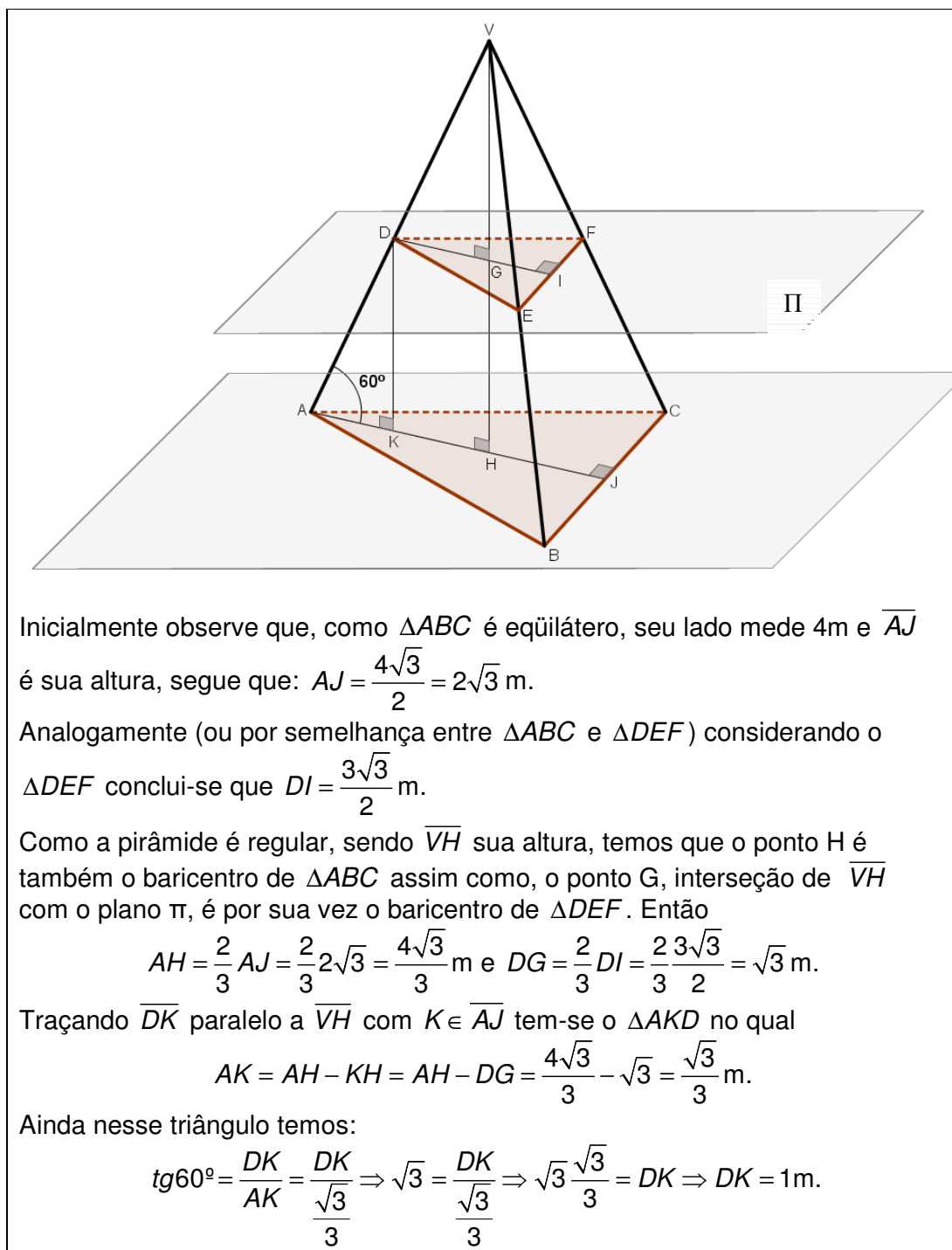
$\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad, teremos $\sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{11\pi}{12} < \cos \frac{\pi}{12}$ e, nesse caso, $y - x < 0$.

Questão 03:

Ao seccionarmos uma pirâmide triangular regular P , de aresta da base medindo 4 m,

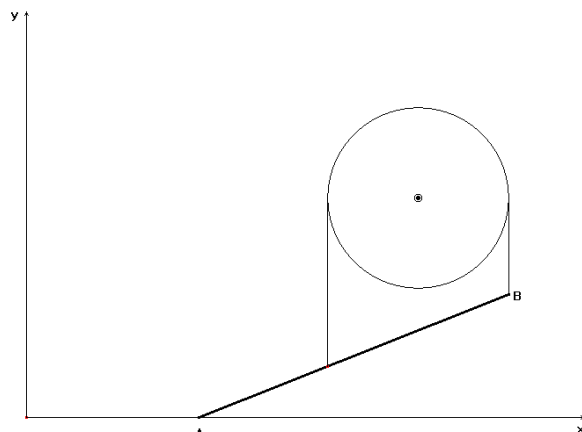
por um plano π paralelo à sua base, foram obtidos dois sólidos: uma pirâmide T , cuja aresta da base mede 3 m, e um segundo sólido. A inclinação da aresta lateral de P em relação à sua base é igual a 60° . Determine a distância entre o plano π e o plano da base de P .

Solução:



Questão 04:

Uma haste está sendo sustentada por um fio de 5,93 cm de comprimento. Esse fio encontra-se tensionado e apoiado em uma roldana em forma de circunferência cuja



equação é $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$. As partes do fio que não se encontram em contato com a roldana são paralelas ao eixo y . A ordenada da extremidade B da haste é 2,14 cm. Veja a ilustração abaixo.

a) Determine as coordenadas do centro e o raio da roldana.

Solução: Como a circunferência da roldana tem equação

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$, podemos concluir que:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$$

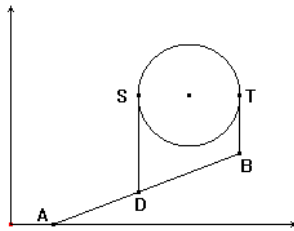
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 + 33 = 0 + 34$$

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Assim, o centro dessa circunferência é dado pelo ponto $C(5,3)$ e seu raio $r = 1$ cm.

b) A extremidade A da haste encontra-se sobre o eixo x . Encontre a abscissa do ponto A. (Use a aproximação 3,14 para π)

Solução: Como o fio tem 5,93 cm de comprimento, temos que:



$TB + \text{comprimento}(\text{arco}ST) + SD = (3 - 2,14) + 3,14 + SD = 5,93$, donde $SD = 1,93$ e, portanto, $y_D = 3 - 1,93 = 1,07$.

Como $x_D = 5 - 1 = 4$ e $x_B = 5 + 1 = 6$ tem-se $B(6;2,14)$ e $D(4;1,07)$.

Equacionando a reta que passa por D e B:

$$y - 1,07 = \frac{2,14 - 1,07}{6 - 4}(x - 4)$$

$$y - 1,07 = \frac{1,07}{2}(x - 4)$$

A abscissa do ponto A é obtida fazendo $y = 0$ nessa última equação:

$$-1,07 = \frac{1,07}{2}(x - 4)$$

$$\frac{-1,07 \times 2}{1,07} = x - 4$$

$$x = 4 - 2 \Rightarrow x = 2$$

Questão 05: Considere os polinômios $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 15x^3 + ax^2 + bx - 8$ e $q(x) = x^2 + 4$ na variável x , com coeficientes inteiros. Sabendo que eles têm pelo menos uma raiz em comum.

a) Determine os valores de a e b .

Solução: As raízes de $q(x) = x^2 + 4$ são obtidas fazendo

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x = \pm 2i.$$

Como $p(x)$ e $q(x)$ têm pelo menos uma raiz em comum e como as duas raízes de $q(x)$ são números complexos, isto implica que ambas as raízes de $q(x)$ devem também ser raízes de $p(x)$, já que se um número complexo é raiz de um polinômio, seu conjugado também o é. Já que todas as raízes $q(x)$ são também raízes de $p(x)$, o polinômio $q(x)$ deve dividir o polinômio $p(x)$, ou seja, o resto da divisão do polinômio $p(x)$ por $q(x)$ deve ser o polinômio identicamente nulo. Efetuando essa divisão encontra-se por quociente o polinômio $p_1(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x + (a + 28)$ e por resto o polinômio $r(x) = (b - 28)x - (4a + 120)$. Com o resto deve ser o polinômio identicamente nulo, devemos ter:

$$\begin{cases} b - 28 = 0 \Rightarrow b = 28 \\ 4a + 120 = 0 \Rightarrow a = -30 \end{cases}$$

b) Encontre todas as raízes de $p(x)$.

Solução: Como $a = -30$ e $b = 28$, temos que

$$p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 30x^2 + 28x - 8.$$

Dividindo o polinômio $p(x)$ pelo polinômio $q(x)$ o quociente será o polinômio $p_1(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$. Como a soma dos coeficientes desse polinômio é zero, conclui-se que $p_1(1) = 0$, ou seja, o polinômio $p_1(x)$ admite o n° real 1 como uma de suas raízes. Dividindo então $p_1(x)$ por $q_1(x) = x - 1$ o quociente será o polinômio $p_2(x) = 2x^2 - 5x + 2$ e o resto será o polinômio identicamente nulo. As raízes do polinômio $p_2(x)$ podem ser encontradas resolvendo a equação quadrática $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, as raízes do polinômio $p(x)$ são: $\frac{1}{2}$, 2, 1, $2i$, $-2i$.

Questão 06: Em um restaurante, um quilograma de comida custa R\$ 25,00. Como política de incentivo à fidelidade, em cada refeição, oferece um cupom para cada R\$ 5,00 de comida consumida. Doze cupons acumulados valem um refrigerante que custa R\$ 3,00.

- a) Pedro consumiu diariamente 550 g nesse restaurante durante 4 dias. Determine o número de cupons que Pedro acumulou ao final desses 4 dias.

Solução: Por regra de três tem-se:

Consumo em gramas	Valor em reais	
1000	25	$\Rightarrow \frac{1000}{550} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 550}{1000} = 13,75$
550	x	

Logo, tendo consumido diariamente 550 g, Pedro pagou R\$ 13,75, recebendo portanto 2 cupons por dia ($13,75 \div 5 = 2,75$). Nesses quatro dias Pedro recebeu $4 \times 2 = 8$ cupons.

- b) Determine o desconto, em porcentagem, que Pedro obteria caso pudesse converter os cupons já acumulados em dinheiro ao consumir 500 g em uma nova refeição.

Solução: Novamente por regra de três tem-se:

Nº de cupons	Valor em reais	
12	3	$\Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{12} = 2.$
8	x	

Logo os 8 cupons acumulados por Pedro corresponde a R\$ 2,00.

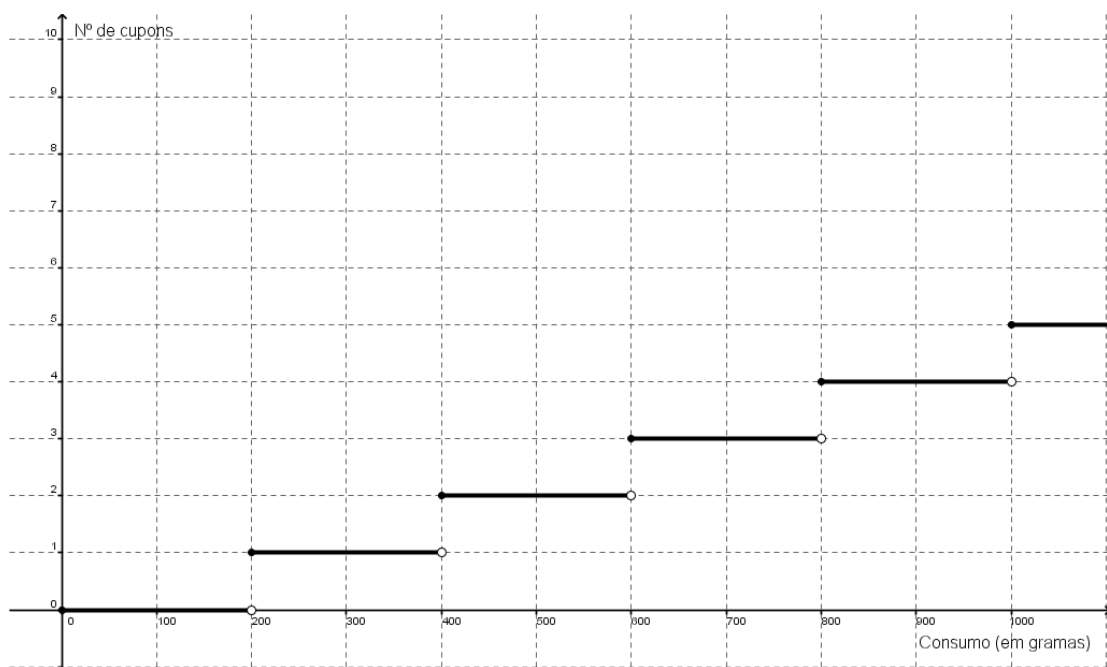
Ao consumir 500 g em uma refeição, Pedro deverá pagar R\$ 12,50. Ao converter seus cupons em desconto, terá R\$ 2,00 de desconto. Em termos percentuais:

Valores em reais	Porcentagem	
12,50	100	$\Rightarrow \frac{12,5}{2} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 100}{12,5} = 16.$
2,00	x	

O desconto seria de 16%.

- c) Esboce o gráfico que representa o número de cupons ganhos em função do consumo (em gramas) em uma refeição.

Solução:



Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

