

01. Considere a expressão $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$. Pede-se:

A) encontrar o valor numérico da expressão para $x = -2$.

B) obter todas as raízes complexas do polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

Questão 01

Comentários: A questão explora conhecimentos sobre aritmética, álgebra elementar, números complexos e polinômios.

A) A substituição direta fornece

$$\begin{aligned} (-2)^4 - (-2)^3 - 5(-2)^2 - (-2) - 6 &= 16 - (-8) - 5 \cdot 4 + 2 - 6 \\ &= 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

B) Pelo item A), uma das raízes de $p(x)$ é -2 . Portanto $p(x)$ é divisível por $x - (-2) = x + 2$, e, efetuando tal divisão, obtemos

$$p(x) = (x + 2)(x^3 - 3x^2 + x - 3).$$

A partir disso, há duas abordagens possíveis.

i. Observando que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x - 3 &= (x^3 + x) - (3x^2 + 3) \\ &= x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 3), \end{aligned}$$

concluimos que as demais raízes de $p(x)$ são as raízes complexas dos polinômios $x^2 + 1$ ou $x - 3$, isto é, são $\pm i$ e 3 .

ii. Aplicando o critério de pesquisa de raízes racionais ao polinômio $q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, concluimos

que suas possíveis raízes racionais são da forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são inteiros tais que a é divisor de 3 e b é divisor de 1 . Portanto, as possíveis raízes racionais de $q(x)$ são $-3, -1, 1$ ou 3 . Testando tais possibilidades, concluimos que 3 é raiz de q e então obtemos

$$q(x) = (x^2 + 1)(x - 3).$$

O resto se dá como em (i).

Pontuação: O item A vale até dois pontos; o item B vale até oito pontos.

02. Os números reais a, b e y são tais que $a \neq 0$ e $a \cos y \neq b \sin y$. Se $\operatorname{tg} x = \frac{a \sin y + b \cos y}{a \cos y - b \sin y}$, calcule o valor de $\operatorname{tg}(x - y)$ em função de a e b somente.

Questão 02

Comentários: A questão explora conhecimentos sobre trigonometria.

Solução 1. Note inicialmente que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -1 &\Leftrightarrow \left(\frac{a \sin y + b \cos y}{a \cos y - b \sin y} \right) \frac{\sin y}{\cos y} = -1 \\ &\Leftrightarrow (a \sin y + b \cos y) \sin y = -(a \cos y - b \sin y) \cos y \\ &\Leftrightarrow a \sin^2 y = -a \cos^2 y \Leftrightarrow a = 0, \end{aligned}$$

o que não ocorre. Portanto, podemos aplicar a fórmula de adição $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

Substituindo a expressão para $\operatorname{tg} x$ na mesma fórmula, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{a \operatorname{sen} y + b \cos y}{a \cos y - b \operatorname{sen} y} - \operatorname{tg} y}{1 + \left(\frac{a \operatorname{sen} y + b \cos y}{a \cos y - b \operatorname{sen} y} \right) \operatorname{tg} y} \\ &= \frac{(a \operatorname{sen} y + b \cos y) \cos y - (a \cos y - b \operatorname{sen} y) \operatorname{sen} y}{(a \cos y - b \operatorname{sen} y) \cos y + (a \operatorname{sen} y + b \cos y) \operatorname{sen} y} = \frac{b \cos^2 y + b \operatorname{sen}^2 y}{a \cos^2 y + a \operatorname{sen}^2 y} \end{aligned}$$

Solução 2. Denote $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, e seja $\Theta \in [0, 2\pi)$ o arco trigonométrico tal que $\cos \Theta = \frac{a}{c}$ e $\operatorname{sen} \Theta = \frac{b}{c}$. Então, $a = c \cos \Theta$ e $b = c \operatorname{sen} \Theta$, donde segue que

$$\operatorname{tg} x = \frac{c \cos \Theta \operatorname{sen} y + c \operatorname{sen} \Theta \cos y}{c \cos \Theta \cos y - c \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen}(\Theta + y)}{\cos(\Theta + y)} = \operatorname{tg}(\Theta + y).$$

Logo, existe um inteiro k tal que $x - (\Theta + y) = k\pi$, ou ainda $x - y = \Theta + k\pi$, e segue daí que

$$\operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{tg}(\Theta + k\pi) = \operatorname{tg} \Theta = \frac{b}{a}.$$

Pontuação: Até dez pontos.

03. Calcule o menor valor inteiro de n tal que $2^n > 5^{20}$, sabendo que $0,3 < \log_{10} 2 < 0,302$.

Questão 03

Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre logaritmos.

Tomando logaritmos decimais em ambos os membros da desigualdade desejada, obtemos

$$\begin{aligned} 2^n > 5^{20} &\Leftrightarrow \log_{10} 2^n > \log_{10} 5^{20} \Leftrightarrow n \cdot \log_{10} 2 > 20 \cdot \log_{10} 5 \\ &\Leftrightarrow n \cdot \log_{10} 2 > 20(1 - \log_{10} 2) \\ &\Leftrightarrow n > 20 \left(\frac{1}{\log_{10} 2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Utilizando as estimativas do enunciado, obtemos

$$20 \left(\frac{1}{\log_{10} 2} - 1 \right) < 20 \left(\frac{1}{0,3} - 1 \right) = 20 \left(\frac{10}{3} - 1 \right) = \frac{140}{3} < 47$$

e

$$20 \left(\frac{1}{\log_{10} 2} - 1 \right) > 20 \left(\frac{1}{0,302} - 1 \right) = 20 \left(\frac{1000}{302} - 1 \right) = \frac{6980}{151} > 46.$$

Portanto, o menor valor possível de n é 47.

Pontuação: Até dez pontos.

04. Poupêncio investiu R\$ 1000,00 numa aplicação bancária que rendeu juros compostos de 1% ao mês, por cem meses seguidos. Decorrido esse prazo, ele resgatou integralmente a aplicação. O montante resgatado é suficiente para que Poupêncio compre um computador de R\$ 2490,00 à vista? Explique sua resposta.

Questão 04

Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre matemática financeira, seqüências e binômio de Newton.

Para ver por que o dinheiro de que Poupêncio dispunha após os cem meses foi suficiente para a compra, observe-se que, se o montante investido em um certo mês fosse x reais, no mês seguinte

Poupêncio teria $x + (1\%)x = \left(1 + \frac{1}{100}\right)x$ reais. Portanto, a seqüência que define a evolução do

montante aplicado é uma progressão geométrica de razão $1 + \frac{1}{100}$ e termo inicial 1000, de maneira

que Poupêncio resgatou, após cem meses, um total de $1000\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$ reais. Esse total é certamente maior que 2490 reais, pois a fórmula do binômio de Newton nos dá

$$\begin{aligned} 1000\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} &= 1000 \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \frac{1}{100^k} \\ &> 1000 \left\{ \binom{100}{0} \frac{1}{100^0} + \binom{100}{1} \frac{1}{100^1} + \binom{100}{2} \frac{1}{100^2} \right\} \\ &= 1000 \left(2 + \frac{99}{200} \right) = 2495. \end{aligned}$$

Pontuação: Até dez pontos.

05. Em um sistema Cartesiano de origem O , seja P o ponto de coordenadas $(1, 2)$ e r uma reta que passa por P e intersecta os semieixos positivos das abscissas e ordenadas, respectivamente, nos pontos A e B . Calcule o menor valor possível para a área do triângulo AOB .

Questão 05

Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre geometria analítica, funções de segundo grau e álgebra elementar.

Se $A(a, 0)$, $B(0, b)$ e S denota a área de AOB , então $a, b > 0$ e $S = \frac{ab}{2}$. Por outro lado, a equação da reta r no sistema Cartesiano em questão é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, e, como $P \in r$, devemos ter

$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. A partir disso, há duas possíveis abordagens.

i. S será mínima se e somente se $\frac{1}{2S}$ for máxima. Como

$$\frac{1}{2S} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \left(1 - \frac{2}{b}\right) \frac{1}{b} = (1 - 2u)u = -2u^2 + u,$$

em que $u = \frac{1}{b}$, é suficiente maximizarmos, para $u > 0$, a função $f(u) = -2u^2 + u$. A teoria de máximos

e mínimos de funções de segundo grau garante que o valor máximo de tal função é $\frac{1}{8}$, valor atingido

quando $u = \frac{1}{4}$. Portanto, o valor máximo para $\frac{1}{2S}$ é $\frac{1}{8}$, e daí obtemos que o valor mínimo para S é 4.

ii. Isolando a em função de b , obtemos $a = \frac{b}{b-2}$; como $a > 0$, temos $b - 2 > 0$, e daí

$$\begin{aligned} 2S = ab &= \frac{b^2}{b-2} = b + 2 + \frac{4}{b-2} \\ &= b - 2 + \frac{4}{b-2} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{(b-2) \cdot \frac{4}{b-2}} + 4 = 8, \end{aligned}$$

em que utilizamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números reais positivos na última passagem acima. Portanto, $S \geq 4$, sendo o valor 4 atingido quando $b - 2 = \frac{4}{b-2}$, isto é, quando $b = 4$.

Pontuação: Até dez pontos.

06. Temos, em um mesmo plano, uma reta r e um triângulo ABC , de lados $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm e $BC = 5$ cm, situado de tal forma que o lado AC é paralelo à reta r , distando 3 cm dela. Calcule, em cm^3 , os possíveis valores para o volume V do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo ABC em torno da reta r .

Questão 06

Comentários: A questão explora conhecimentos sobre geometria espacial e geometria plana.

Inicialmente, como $3^2 + 4^2 = 5^2$, a recíproca do teorema de Pitágoras garante que ABC é retângulo em A . Portanto, o ponto D , de interseção da reta r com a reta suporte do lado AB , coincide com o pé da perpendicular baixada de B (ou de A) a r . Seja E o pé da perpendicular baixada de C a r . Há dois casos a considerar:

a) B e D coincidem: neste caso, temos $V = V_1 - V_2$, em que V_1 é o volume do cilindro circular reto de geratriz AC e raio da base CE e V_2 o volume do cone circular reto de altura DE e raio da base CE . Em cm^3 , $V_1 = \pi 3^2 \cdot 4 = 36\pi$ e $V_2 = \frac{1}{3} \pi 3^2 \cdot 4 = 12\pi$; logo, $V = 36\pi - 12\pi = 24\pi$.

b) A é o ponto médio do segmento BD : sendo F a interseção de r com a reta suporte do lado BC , temos $V = V_3 - (V_1 + V_4)$, em que V_3 é o volume do cone circular reto de altura DF e raio da base BD e V_4 o volume do cone circular reto de altura EF e raio da base CE . Agora, a semelhança dos triângulos CEF e BDF garante que $EF = 4$ cm, daí $DF = 8$ cm. Portanto, em cm^3 temos $V_3 = \frac{1}{3} \pi 6^2 \cdot 8 = 96\pi$ e $V_4 = V_2 = 12\pi$, de maneira que $V = 96\pi - (36\pi + 12\pi) = 48\pi$.

Pontuação: Até dez pontos.

07. Os inteiros não todos nulos m, n, p, q são tais que $45^m \cdot 60^n \cdot 75^p \cdot 90^q = 1$.

Pede-se:

A) dar exemplo de um tal quaterno (m, n, p, q) .

B) encontrar todos os quaternos (m, n, p, q) como acima, tais que $m + n + p + q = 8$.

Questão 07

Comentários: A questão explora conhecimentos sobre aritmética e sistemas lineares.

Escrevendo $45 = 3^2 \cdot 5$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $75 = 3 \cdot 5^2$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, obtemos

$$1 = (3^2 \cdot 5)^m (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^n (3 \cdot 5^2)^p (2 \cdot 3^2 \cdot 5)^q = 2^{2n+q} 3^{2m+n+p+2q} 5^{m+n+2p+q},$$

e, a partir daí, o sistema linear homogêneo de equações

$$\begin{cases} 2n + q = 0 \\ 2m + n + p + 2q = 0 \\ m + n + 2p + q = 0. \end{cases}$$

A primeira equação do sistema nos dá $q = -2n$. Substituindo essa relação nas duas outras equações e escrevendo-as como um sistema linear em m e p , obtemos

$$\begin{cases} 2m + p = 3n \\ m + 2p = n. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para m e p , obtemos $m = \frac{5n}{3}$ e $p = -\frac{n}{3}$.

a) Fazendo $n = 3$, obtemos a possibilidade $m = 5, n = 3, p = -1, q = -6$.

b) Como $m + n + p + q = \frac{5n}{3} + n - \frac{n}{3} - 2n = \frac{n}{3}$, devemos ter $\frac{n}{3} = 8$, e daí $n = 24, m = 40, p = -8, q = -48$.

Pontuação: O item A vale até seis pontos; o item B vale até quatro pontos.

08. ABC é um triângulo retângulo em A , com catetos AB e AC de medidas respectivamente iguais a 3 cm e 4 cm. Com centros em B e em C , traçamos dois círculos β e γ , de raios respectivamente 3 cm e 4 cm, e, em seguida, uma reta r que passa por A e intersecta β e γ respectivamente nos pontos P e Q , com $P, Q \neq A$. Calcule o maior valor possível do produto dos comprimentos dos segmentos PA e QA .

Questão 08

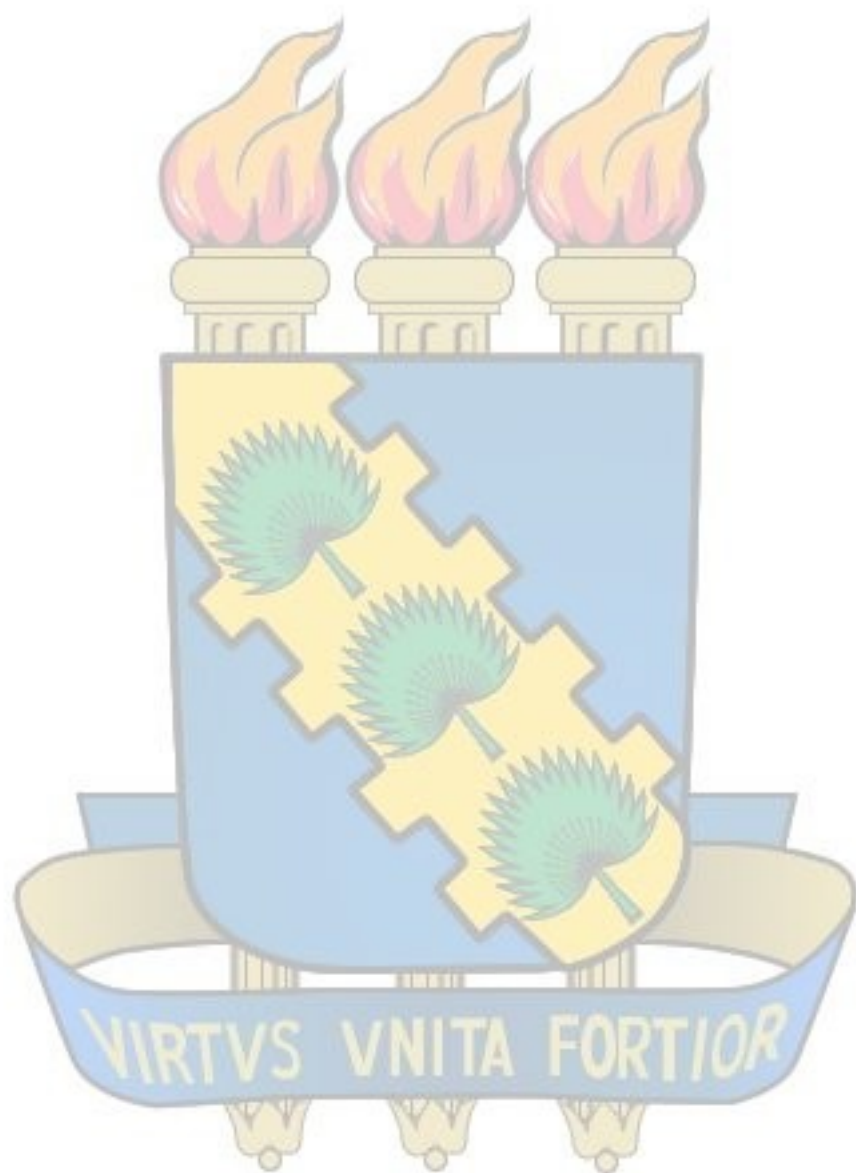
Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre geometria plana e funções trigonométricas.

Se $\angle PAB = \theta$, então $\angle QAC = 90^\circ - \theta$. Como os triângulos PAB e QAC são isósceles de bases PA e QA , respectivamente, a trigonometria de triângulos retângulos nos dá $PA = 6 \cos \theta$ e $QA = 8 \cos (90^\circ - \theta) = 8 \sin \theta$. Logo,

$$PA \cdot QA = 48 \cos \theta \sin \theta = 24 \sin(2\theta),$$

de maneira que o maior valor possível para $PA \cdot QA$ é 24 cm^2 , obtido quando $\theta = 45^\circ$.

Pontuação: Até dez pontos.



Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

