

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Os números n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 , listados abaixo, são racionais. Escreva-os na forma de fração irredutível $\frac{p}{q}$ com p e q números inteiros, sendo $q \neq 0$.

$$n_1 = \frac{2 - \frac{3}{4}}{2 - \frac{1}{3}}, \quad n_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^j + \dots, \quad n_3 = \left(\frac{100}{98}\right).$$

$$n_4 = -\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right), \quad n_5 = e^{\ln(2,95)}.$$

Cálculos e respostas:

- $$n_1 = \frac{\frac{8-3}{4}}{\frac{6-1}{3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}.$$
- n_2 é a soma dos infinitos termos da PG de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1 e, assim,

$$n_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3-1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$
- $$n_3 = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = \frac{98! \cdot 99 \cdot 100}{2 \cdot 98!} = 50 \cdot 99 = 4950 = \frac{4950}{1}.$$
- $$n_4 = -\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -\log_{10}\left(10^{-2}\right) = -(-2) = 2 = \frac{2}{1}.$$
- Como a função exponencial é a inversa da função logarítmica, segue-se que

$$n_5 = 2,95 = \frac{295}{100} = \frac{59}{20}.$$

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Uma pessoa ia gastar R\$ 396,00 para comprar x caixas de um determinado produto. Ao receber o pedido de compra, a empresa fornecedora fez um desconto de R\$ 8,00 no preço de cada caixa. Devido a isto, a pessoa conseguiu comprar duas caixas a mais, pagando os mesmos R\$ 396,00. Pergunta-se:

- a) quantas caixas do produto tal pessoa comprou?
- b) qual o preço inicial (sem desconto) de cada caixa do produto?

Cálculos e respostas:

Sendo x a quantidade inicial de caixas que a pessoa ia comprar e denotando-se por y o preço inicial de cada caixa, tem-se:

$$x y = 396 \quad \text{e} \quad (x+2)(y-8) = 396.$$

O sistema a ser resolvido é equivalente a:

$$x y = 396 \quad \text{e} \quad y = 4x + 8.$$

Ou ainda,

$$x(4x+8) = 396 \quad \text{e} \quad y = 4x + 8.$$

A equação $x(4x+8) = 396$ é equivalente a $x^2 + 2x - 99 = 0$, e esta possui o número 9 como única raiz positiva. Portanto,

$$x = 9 \quad \text{e} \quad y = 4 \cdot 9 + 8 = 36 + 8 = 44.$$

A pessoa comprou então $9 + 2 = 11$ caixas e o preço inicial de cada caixa era de R\$ 44,00.

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

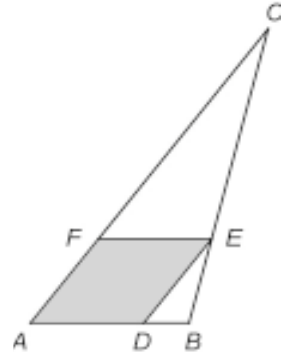
3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Na figura ao lado, os pontos D , E e F pertencem, respectivamente, aos lados AB , BC e AC do triângulo ABC . Eles foram escolhidos de tal forma que o quadrilátero $ADEF$ é um losango. Sabe-se que o perímetro deste losango é 20 cm e que o segmento AB mede 7 cm. Determine:

- a) a medida do lado AD do losango $ADEF$;
- b) a medida do segmento AC ;
- c) a área do losango $ADEF$, sabendo-se que $\cos(\widehat{FAD}) = \frac{3}{5}$.



Cálculos e respostas:

- a) Como os lados de um losango têm a mesma medida, o lado AD mede $20 \div 4 = 5$ cm.
- b) Seja x a medida do segmento FC . O lado AC mede então $5 + x$. Como os ângulos $\widehat{FEC}$ e $\widehat{DBE}$ são congruentes, assim como os ângulos $\widehat{CFE}$ e $\widehat{EDB}$, tem-se que os triângulos ECF e BED são semelhantes e, portanto:

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{DB}}, \quad \text{isto é,} \quad \frac{x}{5} = \frac{5}{2}.$$

Daí segue-se que $x = \frac{25}{2}$. Logo, a medida do lado AC é $5 + \frac{25}{2} = \frac{35}{2}$ cm.

- c) Tem-se que $\sin(\widehat{FAD}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{FAD})} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Assim, a área do losango $ADEF$ é igual a $\overline{AD} \cdot \overline{AF} \cdot \sin(\widehat{FAD}) = 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 20$ cm².

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Considere a circunferência C definida por $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. Determine:

- a) as coordenadas do centro de C e a área da região delimitada por C ;
- b) uma equação para a reta que passa pelo centro de C e pelo ponto $(-1,5)$;
- c) uma equação para a reta tangente à circunferência C no ponto $(-1,5)$.

Cálculos e respostas:

- a) As coordenadas do centro da circunferência C são $(2,1)$ e o seu raio r é 5 u.c.

Portanto, a área pedida é igual a $\pi 5^2 = 25\pi$ u.a..

- b) Uma equação para a reta que passa pelos pontos $(2,1)$ e $(-1,5)$ é dada por

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 2), \text{ ou equivalentemente, } y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}.$$

- c) A reta tangente à circunferência C no ponto $(-1,5)$ é perpendicular à reta determinada no item b).

Portanto, seu coeficiente angular é $\frac{3}{4}$. Neste caso, uma equação para esta reta tangente é:

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x + 1), \text{ ou equivalentemente, } y = \frac{3}{4}x + \frac{23}{4}.$$

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Considere a função $h(x) = a(x-b)^2$. Sabe-se que o gráfico de h contém os pontos $(1,0)$ e $(0,2)$.

- Determine os valores das constantes a e b . Justifique sua resposta.
- Sabendo-se que $h(x) = (f \circ g)(x)$, onde $f(x) = 2x^2$ e $g(x)$ é uma função afim decrescente, determine $g(3)$. Justifique sua resposta.
- Resolva a equação $f(x) - h(x) = |x|$.

Cálculos e respostas:

- Como o gráfico de h passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,2)$, tem-se que $0 = a(1-b)^2$ e $2 = a(0-b)^2$, logo, $a = 2$, $b = 1$ e $h(x) = 2(x-1)^2$.
- $h(x) = 2(x-1)^2$, $f(x) = 2x^2$ e $h(x) = (f \circ g)(x)$ implicam que $2(x-1)^2 = 2(g(x))^2$. Como g é uma função afim decrescente segue-se, necessariamente, que $g(x) = -x+1$ e $g(3) = -2$.
- A equação $f(x) - h(x) = |x|$ é equivalente a $2x^2 - 2(x-1)^2 + 4x - 2 = |x|$, ou ainda, $4x - 2 = |x|$.
Se $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) - h(x) = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

de onde se obtém a solução $x = \frac{2}{3}$.

Se $x < 0$, a equação não possui solução, pois

$$\begin{cases} x < 0 \\ f(x) - h(x) = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4x - 2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

que é um sistema incompatível.

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

