

PISM 2 – QUESTÕES ABERTAS – GABARITO

1ª Questão

a) Utilizando as relações

- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$;
- $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$;

escreva $\sin(2x)$ e $\cos(2x)$ em função de $\sin x$ e $\cos x$.

b) Mostre que $2\sin^2 x - \sin(2x) + 2\cos(2x) = 2\cos x(\cos x - \sin x)$.

c) Resolva a equação $2\sin^2 x - \sin(2x) + 2\cos(2x) = 0$.

Solução:

a) Utilizando as relações fornecidas tem-se:

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Portanto $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ e $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

b) Tem-se que:

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x - \sin(2x) + 2\cos(2x) &= 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x = \\ &= 2\cos x(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

c) Pela identidade obtida na letra (b), a equação dada pode ser reescrita como: $2\cos x(\cos x - \sin x) = 0$.

Resolvendo essa equação obtém-se:

$$\cos x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ ou } (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ ou } \cos x = \sin x$$

Se $\cos x = 0$ então $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

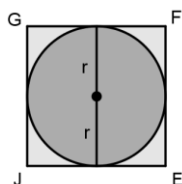
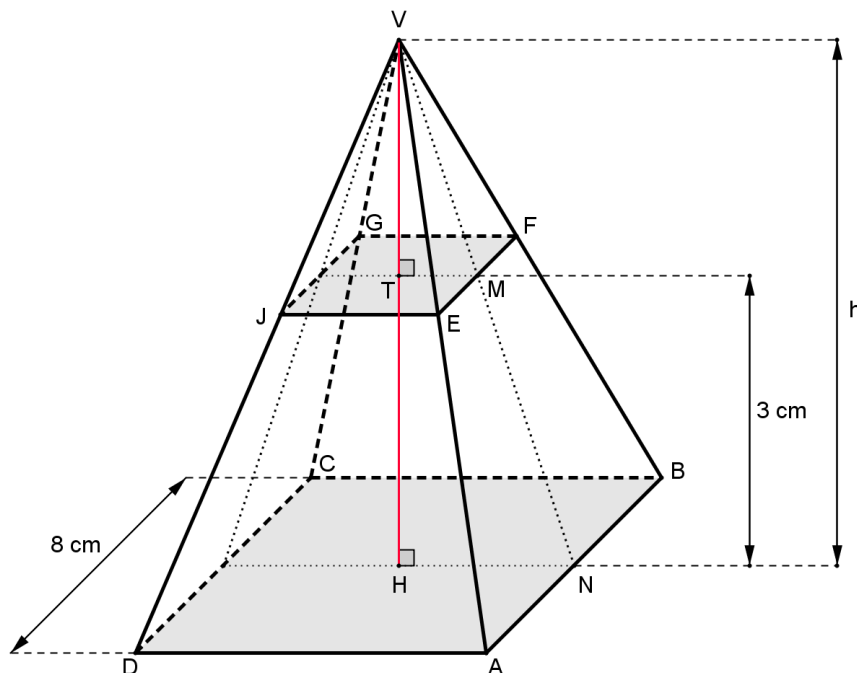
Se $\cos x \neq 0$, tem-se: $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o conjunto solução S da equação fornecida é: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

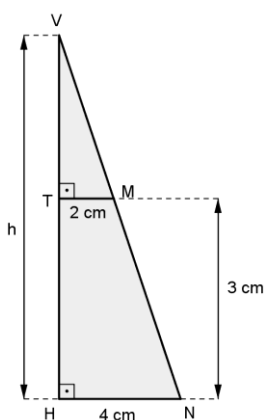
2ª Questão

Uma pirâmide reta de base quadrada tem aresta da base medindo 8cm. Em uma seção transversal paralela à base e distante 3cm desta, inscreve-se um círculo de área igual a $\pi \text{ cm}^2$. Calcule o volume e a área total da pirâmide.

Solução: Observe a ilustração abaixo.



A área de um círculo de raio r é dada por $S = \pi r^2$. Logo deve-se ter $\pi r^2 = \pi$, donde $r^2 = 1$ e, portanto, $r = 1 \text{ cm}$. Com isso, o lado da seção transversal $EFGJ$, que é um quadrado, tem lado medindo 2 cm.



Considere agora os triângulos VHN e VTM , onde M é o ponto médio de $\overline{EF}$ e N é o ponto médio de $\overline{AB}$. Note que esses triângulos são semelhantes e, portanto:

$$\frac{VT}{VH} = \frac{TM}{HN}, \text{ donde: } \frac{h-3}{h} = \frac{2}{4}, \text{ ou seja, } h = 6 \text{ cm.}$$

$$\text{O volume da pirâmide é dado por } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot VH = \frac{1}{3} 64 \cdot 6 = 128 \text{ cm}^3.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo VHN obtém-se:

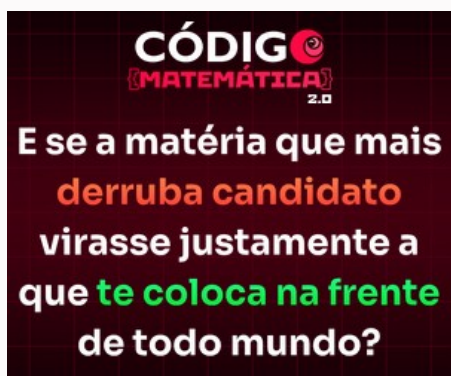
$$VN^2 = VH^2 + HN^2 = 36 + 16 = 52, \text{ donde } VN = 2\sqrt{13} \text{ cm.}$$

$$\text{A área total dessa pirâmide é: } S_{Total} = S_{Base} + 4 \cdot S_{VAB} = AB^2 + 4 \cdot \frac{AB \cdot VN}{2} = 64 + 4 \cdot \frac{8 \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 64 + 32\sqrt{13} \text{ cm}^2.$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

