

## Vestibular 2ª Fase

### Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

#### Questão 1.

As três raízes reais do polinômio  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  são termos de uma progressão aritmética. A fórmula do termo geral de uma PA com primeiro termo  $a_1$  e razão igual a  $q$  é  $a_n = a_1 + (n-1)q$  e a soma dos  $n$  primeiros termos é  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ .

As três raízes são:  $r_1 = a_4 = a_1 + 3q$ ,  $r_2 = a_7 = a_1 + 6q$ ,  $r_3 = a_{16} = a_1 + 15q$ . Para encontrá-las necessitamos dos valores de  $a_1$  e  $q$ . Note que

$$S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = 10(a_1 + a_1 + 19q).$$

Usando as informações do problema montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10(2a_1 + 19q) = \frac{80}{3} \\ a_1 + 12q = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + 57q = 8 \\ a_1 + 12q = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + 57q = 8 \\ -6a_1 - 72q = -18 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 6a_1 + 57q = 8 \\ -15q = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{8-57q}{6} = -5 \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Substituindo estes valores nas fórmulas de  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  obtemos:

$$r_1 = -5 + 3 \cdot \frac{2}{3} = -3;$$

$$r_2 = -5 + 6 \cdot \frac{2}{3} = -1;$$

$$r_3 = -5 + 15 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Como o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $p(x)$  é igual a 1, este pode ser escrito como:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Logo

$$p(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 5) = (x + 3)(x^2 + x - 5x - 5) = x^3 - x^2 - 17x - 15.$$

**Resposta:**  $a = -1$ ,  $b = -17$  e  $c = -15$

### Questão 2.

(a) A quantia inicial corresponde ao valor da função  $F$  no instante inicial  $t = 0$ . Substituindo na expressão de  $F$ , temos

$$F(0) = 100 \cdot (1,2)^0 = 100 \cdot 1 = 100.$$

**Resposta:** R\$ 100,00.

(b) A quantia que a pessoa tem após 5 meses corresponde ao valor da função  $F$  no tempo  $t = 5$ . Substituindo na expressão de  $F$ , temos

$$F(5) = 100 \cdot (1,2)^5.$$

Calculando  $1,2^5 = ((1,2)^2)^2 \cdot 1,2 = 1,44^2 \cdot 1,2 = 2,0736 \cdot 1,2 = 2,48832$ . Logo

$$F(5) = 100 \cdot 2,48832 = 248,832.$$

Arredondando para centavos R\$ 248,83.

**Resposta:** R\$ 248,83.

(c) Queremos encontrar o valor de  $t$  para o qual  $F(t) = 2700$ , ou seja

$$100(1,2)^t = 2700$$

$$(1,2)^t = 27.$$

Chegamos a uma equação exponencial em  $T$  que resolvemos aplicando logaritmo dos dois lados:

$$\log_{10}(1,2)^t = \log_{10} 27 = \log_{10} 3^3.$$

Usaremos as seguintes propriedades de logaritmo

$$\log_{10} a^p = p \cdot \log_{10} a; \quad \log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b; \quad \log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b; \quad \log_{10} 10 = 1.$$

Voltando à equação, temos

$$t \cdot \log_{10}(1,2) = 3 \cdot \log_{10} 3.$$

A questão nos fornece valores para logaritmo de 2 e 3. Como  $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{2^2 \cdot 3}{10}$  podemos aplicar as propriedades de logaritmo novamente

$$\log_{10}(1,2) = \log_{10} \frac{2^2 \cdot 3}{10} = 2 \cdot \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 = 2 \cdot 0,3 + 0,48 - 1 = 0,08. \text{ Logo}$$

$$t \cdot 0,08 = 3 \cdot 0,48 = 1,44$$

$$t = \frac{1,44}{0,08} = 18.$$

**Resposta:** 18 meses.

### Questão 3.

(a) Como o time A sempre ganha dos times B, C, D, E e sempre perde para os times F, G, H a probabilidade dele avançar para a próxima fase é:

$$\frac{\#\{A \text{ enfrenta B, C, D ou E}\}}{\#\{A \text{ enfrenta B, C, D, E, F, G ou H}\}} = \frac{4}{7}$$

**Resposta:**  $\frac{4}{7}$ .

(b) A probabilidade do time B avançar à próxima fase, tendo vencido um determinado time, é o produto da probabilidade dele enfrentar este time  $\left(\frac{1}{7}\right)$  pela probabilidade dele vencer este time. Portanto, as probabilidades do time B

vencer o time A:  $\frac{1}{7} \cdot 0 = 0$ ;

vencer o time C:  $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$ ;

vencer o time D:  $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$ ;

vencer o time E:  $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$ ;

vencer o time F:  $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$ ;

vencer o time G:  $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$ ;

vencer o time H:  $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$ .

A probabilidade do time B avançar para a próxima fase é a soma destas probabilidades

$$3 \cdot \frac{2}{21} + 3 \cdot \frac{1}{28} = \frac{2}{7} + \frac{3}{4 \cdot 7} = \frac{8+3}{28} = \frac{11}{28}.$$

**Resposta:**  $\frac{11}{28}$ .

#### Questão 4

(a) O ponto  $P = (x, y)$  pertence à reta  $r$  se, e somente se, satisfaz a equação  $y = -x + 6$ . Então, as coordenadas de  $P$  em função de  $x$  são  $P = (x, -x + 6)$ .

Agora, o ponto  $P$  está no interior da circunferência  $\lambda$  se, e somente se, a distância de  $P$  até o centro  $C = (3, 5)$  for menor que o raio de  $\lambda$ . Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que o ponto  $P = (x, -x + 6)$  está no interior da circunferência  $\lambda$  se, e somente se:

$$d(P, C) < 4$$

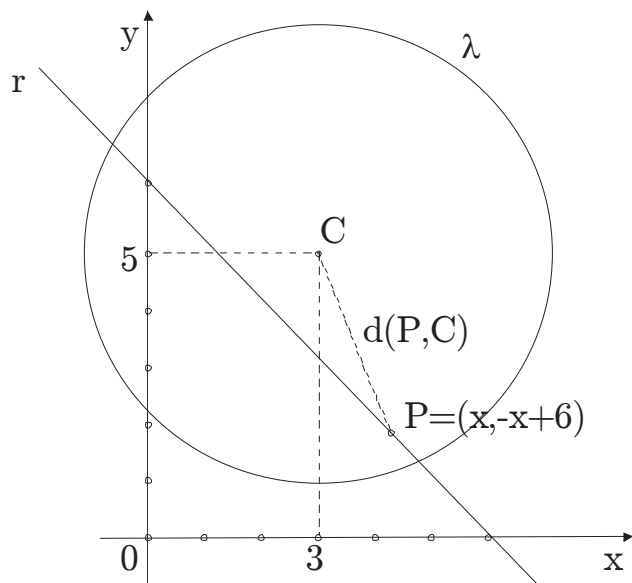
$$\sqrt{(x-3)^2 + (-x+6-5)^2} < 4$$

$$(x-3)^2 + (-x+1)^2 < 16$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 < 16$$

$$2x^2 - 8x - 6 < 0$$

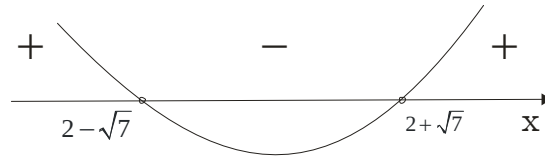
$$x^2 - 4x - 3 < 0.$$



Para determinar os valores de  $x$  para os quais esta função assume valores negativos fazemos o estudo do sinal da função quadrática  $f(x) = x^2 - 4x - 3$ . O discriminante desta função é  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28 > 0$  e o coeficiente do termo quadrático é positivo. Logo,  $f(x)$  possui duas raízes reais distintas e o seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima.

As raízes da função  $f(x)$  são:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}.$$



A função assume valores negativos, se e somente se,  $x$  está entre as raízes:  $2 \pm \sqrt{7}$ .

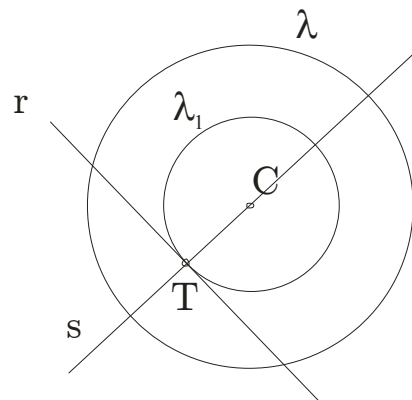
**Resposta:** O ponto  $P = (x, y)$ , pertencente à reta  $r$ , está no interior da circunferência  $\lambda$  para valores de  $x$  satisfazendo  $2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}$ .

(b) Como a circunferência  $\lambda_1$  possui o mesmo centro  $C = (3, 5)$  que a circunferência  $\lambda$ , basta determinar o raio de  $\lambda_1$ .

Sendo  $\lambda_1$  tangente à reta  $r$ , o ponto de tangência  $T$  é o pé da perpendicular baixada do ponto  $C$  até  $r$ . Seja  $s$  a reta que passa por  $C$  e é perpendicular a  $r$ . O ponto  $T$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com a reta  $s$ . O raio de  $\lambda_1$  é a distância de  $C$  a  $T$ .

O coeficiente angular da reta  $r$  de equação  $y = -x + 6$  é  $m_r = -1$ . O coeficiente angular da

reta  $s$  deve ser  $m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-1} = 1$ .



Como  $s$  passa por  $C = (3, 5)$ , sua equação é:

$$y - 5 = m_s(x - 3)$$

$$y - 5 = 1 \cdot (x - 3)$$

$$y = x + 2.$$

Para encontrar o ponto de interseção  $T$  basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 6 = x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Então, o ponto de tangência é  $T = (2, 4)$  e o raio de  $\lambda_1$  é igual a:

$$d(C, T) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Portanto,  $\lambda_1$  é a circunferência de centro  $C = (3, 5)$  e raio  $\sqrt{2}$ .

**Resposta:** A equação de  $\lambda_1$  é:  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2$ .

### Questão 5

A lei dos cossenos, aplicada ao triângulo  $PRS$ , estabelece que:

$$PR^2 = PS^2 + RS^2 - 2 \cdot PS \cdot RS \cdot \cos \widehat{PSR}.$$

Logo:

$$\cos \widehat{PSR} = \frac{PS^2 + RS^2 - PR^2}{2 \cdot PS \cdot RS}.$$

**Passo 1:** Seja  $P'$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $Q$  até a reta  $\overline{AE}$ . Então,  $ABQP'$  é um retângulo e daí:

$$QP' = AB = 10 \text{ e}$$

$$P'P = AP - AP' = AP - BQ = 30 - 20 = 10.$$

Logo, no triângulo  $PP'Q$ , retângulo em  $P'$ , temos que:

$$PQ^2 = P'P^2 + P'Q^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

$$PQ = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

**Passo 2:** Seja  $R'$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $Q$  até a reta  $\overline{CG}$ . Então  $BCR'Q$  é um retângulo e daí:

$$QR' = BC = 10 \text{ e}$$

$$R'R = CR - CR' = CR - BQ = 30 - 20 = 10.$$

Logo, no triângulo  $RR'Q$ , retângulo em  $R'$ , temos que:

$$RQ^2 = R'R^2 + R'Q^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

$$RQ = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

**Passo 3:** Como  $\overline{AP}$  é paralelo a  $\overline{CR}$  e  $AP = CR = 30$ , então  $ACRP$  é um paralelogramo e  $PR = AC$ . Mas:

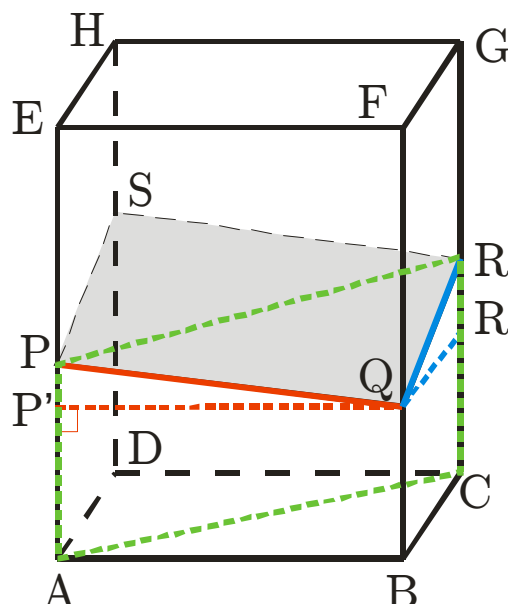
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow PR = AC = 10\sqrt{2}.$$

**Passo 4:** Como  $\overline{PS}$  e  $\overline{QR}$  são coplanares e estão em faces opostas do prisma, temos que  $\overline{PS}$  e  $\overline{QR}$  são paralelos. Analogamente,  $\overline{PQ}$  e  $\overline{RS}$  são paralelos. Logo,  $PQRS$  é um paralelogramo e então  $PS = QR = 10\sqrt{2}$  e  $RS = PQ = 10\sqrt{2}$ .

Finalmente, substituindo as medidas encontradas na expressão obtida acima para o cosseno, obtemos:

$$\cos \widehat{PSR} = \frac{200 + 200 - 200}{2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

**Resposta:**  $\frac{1}{2}$ .

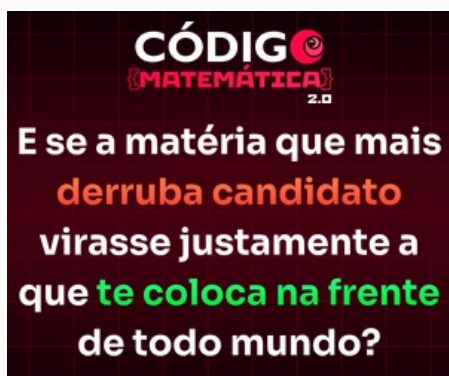


**Passo 1**  
**Passo 2**  
**Passo 3**

## Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



### Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



### Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



### Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

