

BERNOULLI COLÉGIO E PRÉ-VESTIBULAR



http://www.colegiobernoulli.com.br/bernoulli_resolve/

Matemática – Questão 01

Considere a região R do plano cartesiano dada por

$$R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\}.$$

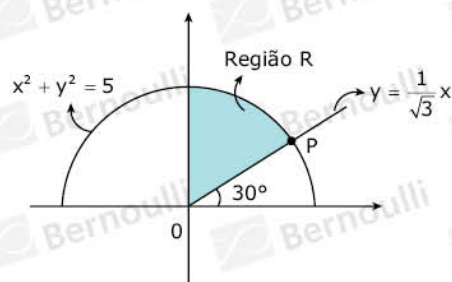
Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas do ponto $P \in R$ que possui a **maior** abscissa.
2. **CALCULE** a área da região R .

RESOLUÇÃO:

1. Considere a representação da região R no plano a seguir:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{ com } y \geq 0 \text{ (semirreta } s: 0(0,0) \in s; \alpha = 30^\circ) \\ y = \sqrt{5-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5, \text{ com } y \geq 0 \text{ (semicircunferência } \lambda: C(0,0); r = \sqrt{5}) \end{cases}$$



A região é limitada pela reta e pelo arco da circunferência do 1º quadrante.

Observa-se que o ponto de maior abscissa é o encontro entre as curvas $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ e $y = \sqrt{5-x^2}$.

Ponto P:

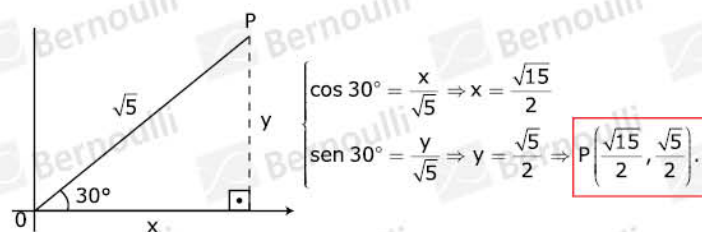
1ª solução:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{5-x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{5-x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 5-x^2 \Rightarrow \frac{4x^2}{3} = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Para $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$, temos $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Ponto } P \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right).$$

2ª solução:



2. A região representa um setor circular de ângulo central 60° e raio $\sqrt{5}$. Logo:

$$A = \frac{1}{6} \pi (\sqrt{5})^2$$

$$A = \frac{5\pi}{6} \text{ u.a.}$$

Matemática – Questão 02

Inicialmente, isto é, quando $t = 0$, um corpo, à temperatura de T_0 °C, é deixado para esfriar num ambiente cuja temperatura é mantida constante e igual a T_a °C.

Considere $T_0 > T_a$.

Suponha que, após t horas, a temperatura T do corpo satisfaz a esta Lei de Resfriamento de Newton:

$$T = T_a + c5^{-kt},$$

em que c e k são constantes positivas.

Suponha, ainda, que:

- a temperatura inicial é $T_0 = 150$ °C;
- a temperatura ambiente é $T_a = 25$ °C; e
- a temperatura do corpo após 1 hora é $T_1 = 30$ °C.

Considerando essas informações,

1. **CALCULE** os valores das constantes c e k .
2. **DETERMINE** o instante em que a temperatura do corpo atinge 26 °C.
3. Utilizando a aproximação $\log_{10} 2 \approx 0,3$, **DETERMINE** o instante em que a temperatura do corpo atinge 75 °C.

RESOLUÇÃO:

$$1. T = T_a + c \cdot 5^{-kt}$$

Sendo $T_a = 25$ °C, temos:

$$T = 25 + c \cdot 5^{-kt}$$

$$t = 0 \Rightarrow T_0 = 150 \text{ °C}$$

$$150 = 25 + c \cdot 5^{-k \cdot 0}$$

$$125 = c \cdot 1$$

$$\boxed{c = 125}$$

$$t = 1 \Rightarrow T_1 = 30 \text{ °C}$$

$$30 = 25 + c \cdot 5^{-k \cdot 1}$$

$$5 = 125 \cdot 5^{-k}$$

$$\frac{5}{125} = 5^{-k}$$

$$\frac{1}{25} = 5^{-k}$$

$$5^{-2} = 5^{-k}$$

$$\boxed{k = 2}$$

$$2. T = T_a + c \cdot 5^{-kt} \Rightarrow T = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$$

Sendo $T = 26$ °C, temos:

$$26 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$$

$$1 = 125 \cdot 5^{-2t}$$

$$\frac{1}{125} = 5^{-2t}$$

$$5^{-3} = 5^{-2t}$$

$$2t = 3$$

$$\boxed{t = \frac{3}{2} \text{ h}}$$

$$3. T = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$$

Sendo $T = 75$ °C, temos:

$$75 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$$

$$50 = 125 \cdot 5^{-2t}$$

$$\frac{50}{125} = 5^{-2t}$$

$$\frac{2}{5} = 5^{-2t}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da equação, temos:

$$\log \frac{2}{5} = \log 5^{-2t}$$

$$\log 2 - \log 5 = -2t \log 5$$

$$\text{Como } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7, \text{ temos:}$$

$$0,3 - 0,7 = -2t \cdot 0,7$$

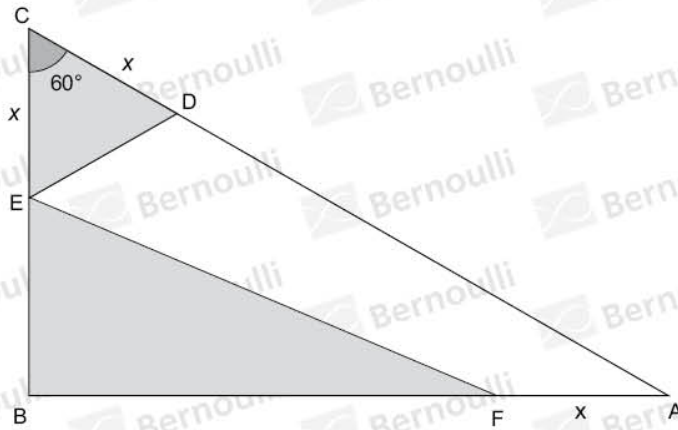
$$-0,4 = -1,4 t$$

$$t = \frac{0,4}{1,4}$$

$$\boxed{t = \frac{2}{7} \text{ h}}$$

Matemática – Questão 03

Nesta figura, o triângulo ABC é retângulo em B, $\hat{C} = 60^\circ$, $\overline{CE} = \overline{CD} = \overline{FA} = x$ e $\overline{BC} = 1$:

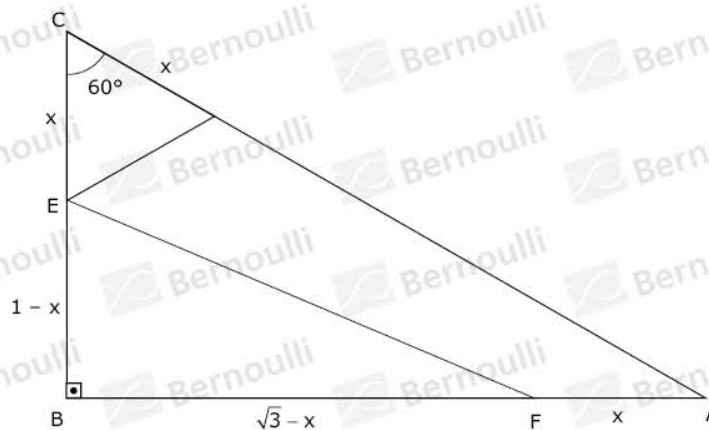


Considerando essas informações,

1. **EXPRESSE** a área do triângulo CED em função de x .
2. **EXPRESSE** a área do triângulo EBF em função de x .
3. **CALCULE** o valor de x tal que a soma das áreas dos triângulos CED e EBF seja igual à área do quadrilátero EFAD.

RESOLUÇÃO:

1. Área do triângulo equilátero: $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ ($\overline{CE} = \overline{CD}$ e $\hat{ECD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle CED$ é equilátero.)
- 2.



Como $\overline{BC} = 1$, temos que $\overline{AC} = 2$ e $\overline{AB} = \sqrt{3}$.

Portanto, $\text{Área}_{\triangle EBF} = \frac{(1-x) \cdot (\sqrt{3}-x)}{2}$.

$$\begin{aligned} 3. \quad A_{\triangle CED} + A_{\triangle EBF} &= A_{\triangle ABC} - A_{\triangle CED} - A_{\triangle EBF} \\ 2A_{\triangle CED} + 2A_{\triangle EBF} &= A_{\triangle ABC} \\ \frac{2x^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{2(1-x)(\sqrt{3}-x)}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (2 + \sqrt{3})x^2 - (2 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

$x' = 1$ (não convém, pois $x < \overline{BC} = 1$)

$x'' = 2\sqrt{3} - 3$

• Cálculo da área do $\triangle ABC$:

$$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Matemática – Questão 04

No plano cartesiano, o ponto $A = (1, 11)$ é vértice do quadrado $ABCD$, cuja diagonal BD está sobre a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas do centro M do quadrado $ABCD$.
2. **DETERMINE** as coordenadas do vértice C .
3. **DETERMINE** as coordenadas dos vértices B e D .

RESOLUÇÃO:

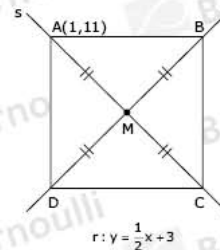
1. Seja s a reta que contém a diagonal AC . Temos que s é perpendicular à reta r , de equação $y = \frac{1}{2}x + 3$. Então, $m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

Equação de s :

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - 11 = -2 \cdot (x - 1)$$

$$y = -2x + 13$$



O centro M do quadrado $ABCD$ é o ponto de interseção de r e s . Logo:

$$\frac{1}{2}x + 3 = -2x + 13 \Rightarrow x = 4$$

$$y = -2x + 13 \Rightarrow y = 5$$

Portanto, concluímos que $M(4, 5)$.

2. Como M é o ponto médio de AC , temos:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 7 \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 5 = \frac{11 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -1 \end{cases}$$

Portanto, concluímos que $C(7, -1)$.

3. Como B e D estão sobre a reta $r: y = \frac{1}{2}x + 3$, temos que:

$$d(B, M) = d(A, M)$$

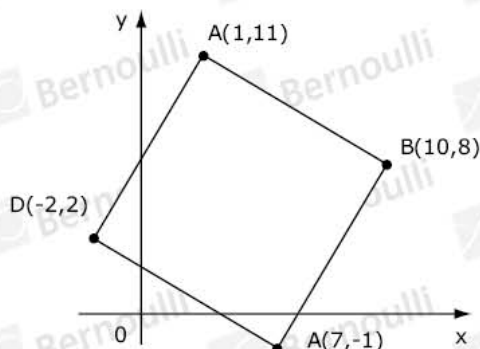
$$\sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 3 - 5\right)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (11 - 5)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, vem:

$$5x^2 - 40x - 100 = 0, \text{ cujas raízes são:}$$

$$\begin{cases} x' = 10 \\ x'' = -2 \end{cases}$$

Interpretando geometricamente, temos:



$$\begin{cases} B(10, 8) \\ D(-2, 2) \end{cases}$$

Matemática – Questão 05

Um bloco de madeira retangular e sólido mede 30 cm de largura, 20 cm de comprimento e 10 cm de altura e o seu exterior foi colorido de azul.

Por meio de cortes paralelos a cada uma de suas faces, esse bloco é inteiramente dividido em cubos de 1 cm de aresta, que são colocados dentro de uma urna.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** a quantidade de cubos que resultou da divisão desse bloco de madeira.
2. **CALCULE** a probabilidade de uma pessoa retirar da urna, que contém todos os cubos em que o bloco foi dividido, um cubo com, **exatamente, duas** faces azuis.
3. **CALCULE** a probabilidade de uma pessoa retirar um cubo da urna, que contém todos os cubos em que o bloco foi dividido, lançá-lo sobre uma mesa e obter a **face superior azul**.

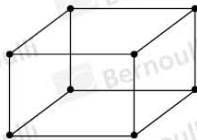
RESOLUÇÃO:

$$1. V_{\text{bloco}} = 30 \cdot 20 \cdot 10 = 6000 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cubo}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ cm}^3$$

$$n^{\circ} \text{ cubos} = \frac{V_{\text{bloco}}}{V_{\text{cubo}}} \Rightarrow n^{\circ} \text{ cubos} = 6000$$

2.



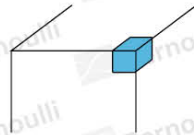
Temos: $\begin{cases} 4 \text{ mesas de tamanho } 10 \\ 4 \text{ mesas de tamanho } 20 \\ 4 \text{ mesas de tamanho } 30 \end{cases}$

Em cada aresta devemos tirar os 2 cubos que estão em cada extremo, logo temos:

$$N = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 18 + 4 \cdot 28 \Rightarrow N = 216, \text{ portanto a probabilidade de retirar um cubo com exatamente 2}$$

$$\text{faces azuis, dada por } P, \text{ será } P = \frac{216}{6000} \Rightarrow P = \frac{9}{250}$$

3. • N° de cubos com 3 faces pintadas = 8.

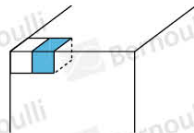


1º Modelo:

Cubo com 3 faces azuis.

N° de cubos no grupo: 8

- N° de cubos com 2 faces pintadas = 216.

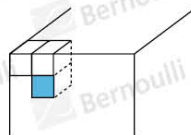


2º Modelo:

Cubo com 2 faces azuis.

$$N^{\circ} \text{ de cubos no grupo: } 28 \cdot 4 + 18 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 216$$

- N° de cubos com 1 face pintada = 1744.



3º Modelo:

Cubo com 1 face azul.

$$N^{\circ} \text{ de cubos no grupo: } 2 \cdot 28 \cdot 18 + 2 \cdot 28 \cdot 8 + 2 \cdot 18 \cdot 8 = 1744$$

- N° cubos com nenhuma face pintada = 4032.

Como esses cubos formam um bloco com arestas 8, 18 e 28, temos:

$$N = 8 \cdot 18 \cdot 28 = 4032$$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{4032}{6000} + \frac{1744}{6000} + \frac{216}{6000} + \frac{8}{6000} + \frac{3}{6000} \Rightarrow P = \frac{1744}{36000} + \frac{432}{36000} + \frac{24}{36000}$$

$$P = \frac{2200}{36000} \Rightarrow P = \frac{11}{180}$$

Matemática – Questão 06

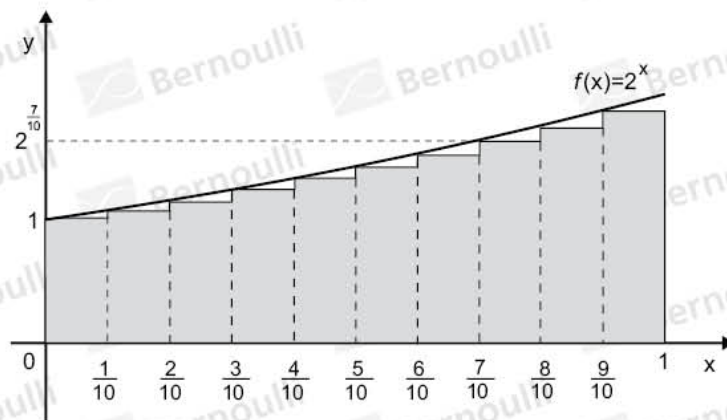
Considere uma função $f(x)$ crescente, positiva e definida no intervalo $[0,1]$.

A soma parcial inferior de ordem n de $f(x)$, representada por $S_n(f)$, é definida por:

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right].$$

Essa soma é uma aproximação para o valor da área da região do plano cartesiano que se situa abaixo do gráfico da função $f(x)$, acima do eixo x e entre as retas de equações $x = 0$ e $x = 1$.

A interpretação geométrica de $S_{10}(f)$ para a função $f(x) = 2^x$ é a área da região sombreada representada nesta figura:



Considerando essas informações,

- DEMONSTRE** que a soma parcial inferior de ordem n da função $f(x) = 2^x$ é expressa, também, por $S_n(f) = \frac{1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1}}{n}$ e **DETERMINE** o valor de r .
- Utilizando a aproximação $2 \approx (1,007)^{100}$, **CALCULE** a soma parcial inferior de ordem 100 da função $f(x) = 2^x$ e **ESCREVA** o resultado com aproximação de **duas** casas decimais.

RESOLUÇÃO:

- Da definição, temos que:

$$S_n(f) = \frac{1}{n} [1 + 2^{1/n} + 2^{2/n} + 3^{3/n} + \dots + 2^{(n-1)/n}]$$

Substituindo $2^{1/n}$ por r , mostramos que a soma pode ser escrita como:

$$S_n(f) = \frac{1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}}{n}, \text{ com } \boxed{r = 2^{1/n}}$$

- Do item 1, temos que:

$$S_n(f) = \frac{1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}}{n}$$

Usando a fórmula da soma da P.G. finita:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\text{Assim, } S_n(f) = \frac{r^n - 1}{n(r - 1)}$$

Para $n = 100$, temos $r = 2^{1/100} = 1,007$ e $r^{100} = 2$.

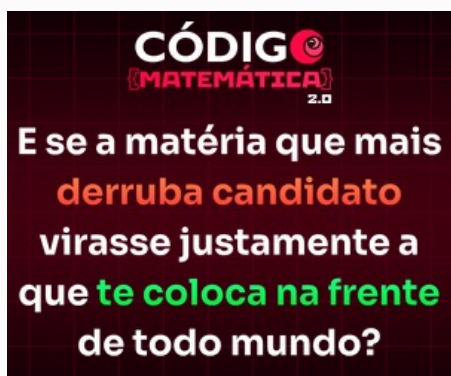
Substituindo na soma, temos:

$$S_{100}(f) = \frac{1}{100(1,007 - 1)} = \frac{10}{7} = \boxed{1,42}$$

Cursos que Indicamos

Conheça os cursos e dê o próximo passo na sua preparação.

Clique na imagem ou no botão para acessar.



Código Matemática 2.0

Conhecer o curso



Curso Preparatório ENEM

Conhecer o curso



Curso Preparatório Redação ENEM

Conhecer o curso

